二维非线性五次 Schrödinger 方程可约化的 KAM 环面

耿建生¹, 薛帅帅^{2*}

1. 南京大学数学系, 南京 210093;

2. 南京审计大学统计与数学学院, 南京 211815

E-mail: jgeng@nju.edu.cn, ssx@nau.edu.cn

收稿日期: 2018-11-07; 接受日期: 2019-09-25; 网络出版日期: 2020-03-18; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11971012) 资助项目

摘要 在周期边界条件下, 本文考虑二维非线性五次 Schrödinger 方程 $iu_t - \Delta u + |u|^4 u = 0$ ($t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{T}^2$), 证明一个无限维的 KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) 定理. 应用无限维的 KAM 定理, 本文获得这个方程一族 Whitney 光滑的部分双曲的小振幅拟周期解.

关键词 五次 Schrödinger 方程 可约化的 KAM 环面 部分双曲 拟周期解

MSC (2010) 主题分类 37K55, 35B10, 35J10, 35Q40, 35Q55

1 引言

在考虑加上 Hamilton 扰动的意义下, 线性或可积方程的拟周期解的存在性是人们关心的一个问题. 在 Hamilton 偏微分方程的 KAM 理论中已经有许多显著的结果. 到目前为止, 这是一个成熟的理论, 它为许多动力系统的分析提供了有利的工具, 并且与其他领域有着紧密的关联. 尤其近年来, 有很多数学、物理分支中, 如偏微分方程、动力系统、算子谱理论和天体力学等, 出现了各种与 KAM 理论相关的内容. Hamilton 偏微分方程的 KAM 理论主要有两种方法. 一种是由经典 KAM 理论发展来的 KAM 理论 (参见文献 [1-8]), 另一种是由 Craig、Wayne 和 Bourgain 通过 Newton 迭代技巧, 发展完善而来的 CWB (Craig-Wayne-Bourgain) 方法 (参见文献 [9-16]). 前者的方法优点是在拟周期解附近, 通过一局部的 Birkhoff 标准形得到拟周期解的线性稳定性和零 Lyapunov 指数, 这对于理解拟周期解附近的动力学性态是非常有用的 (参见文献 [17-23]). 如果标准形是与角变量无关的, 那么获得的 KAM 环面称为可约化的 KAM 环面. 在可约化的 KAM 环面中, 如果所有的法频实部为 0, 则对应的拟周期解是线性稳定的; 如果至少有一个法频有非零的实部, 则对应的拟周期解是部分双曲的. 在涉及重法频或近似重法频的情形下, CWB 方法最初被用作通常的 KAM 方法的替代方案, 其长处在于, 它通过解与角变量有关的同调方程避免了烦琐的第二 Melnikov 条件 (此条件不是必须的, 参见文献 [24]), 使

英文引用格式: Geng J S, Xue S S. Reducible KAM tori for two-dimensional quintic Schrödinger equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 457-498, doi: 10.1360/SCM-2018-0793

得它相比于 KAM 理论更适于解重法频共振的情形, 从而对周期边界条件的 Hamilton 偏微分方程及高维偏微分方程很有效, 而缺点是它不能给出拟周期解附近的动力学性态, 使得我们无从获知以拟周期解附近点为初值的解的长时间行为.

线性 Hamilton 偏微分方程的动力学性质十分清楚. 人们想知道在 Hamilton 扰动下, 线性或可积方程拟周期解的存在性. 沿着这条线, 有大量优秀的成果出现. 一维的 Hamilton 偏微分方程, 最早证明的是 Dirichlet 边界条件下的一维波方程. 因为其法频是单的, 并且相互之间有一定的距离, 从而只需解一个数量的同调方程, 并且其扰动的向量场有 -1 阶的光滑性, 便于测度计算. 但是, 同样 Dirichlet 边界下的一维 Schrödinger 方程, 其向量场的光滑性较波方程差, 但是好在法频随着 $n \rightarrow \infty$ 会相互远离. 但是, 考虑周期边界条件下的一维波方程, 就出现了重法频的障碍, Craig 和 Wayne^[16] 通过 Nash-Moser 迭代和 Lyapunov-Schmidt 技巧, 成功地得到了周期边界条件下一维波方程和 Schrödinger 方程的拟周期解 (KAM 定理证明周期边界条件下的一维 Schrödinger 方程的拟周期解参见文献 [25]). 同时 You^[26] 首次在有限维克服了重法频带来的困难, 进一步用一个无穷维的 KAM 定理, 应用于周期边界条件下一维的波方程 (参见文献 [2]). 至此, 这些方法对于一维 Hamilton 偏微分方程都有很好的应用. 尽管如此, 这些方法在处理高维 Hamilton 偏微分方程中却遇到困难, 主要因为随着 $n \rightarrow \infty$, 法频的重数也趋于无穷大, 带来了很大的困难. Bourgain^[9] 沿袭并发展了 Craig 和 Wayne 的方法, 最早取得了开创性的结果, 证明了二维的非线性 Schrödinger 方程有小振幅的拟周期解. 接着, Bourgain^[12] 又改进了方法, 证明了高维非线性 Schrödinger 方程和波方程有小振幅拟周期解 (有限光滑情形参见文献 [27, 28]). Wang^[29] 证明了能量超临界的非线性 Schrödinger 方程有小振幅的拟周期解. 通过有限维 KAM 理论构造高维 Hamilton 偏微分方程的拟周期解的方法后来才出现. Geng 和 You^[30, 31] 及 Geng 和 Yi^[32] 证明了高维非线性梁方程和非局部 Schrödinger 方程有小振幅线性稳定拟周期解. 通过扰动的 Töplitz-Lipschitz 性质, Eliasson 和 Kuksin^[4] 通过修改的 KAM 方法构造了更有趣的高维非线性 Schrödinger 方程的小振幅线性稳定的拟周期解. 但是, Eliasson 和 Kuksin 考虑的高维非线性 Schrödinger 方程是带有卷积算子的 $V(x)$ (一般外参数通过卷积算子或者乘子 M_ξ 引进). Pöschel^[33] 在一个有限的 x - 区间上, 构造了依赖于一些位势 V 的特定的 Schrödinger 方程的概周期解. Geng 和 You^[34] 克服了 Schrödinger 方程的正则性较波方程弱的困难, 证明了一个满足衰减条件的 KAM 定理, 应用于周期边界条件下的含有乘子 M_ξ 的高维的非线性 Schrödinger 方程, 获得了小振幅线性稳定拟周期解, 通过增加零动量假设, 给出了一个简化的证明. 上述的方程都需要一个外参数. 对于没有外参数的 Hamilton 偏微分方程, 人们就需要利用标准形技巧得到扭转的近可积系统. 高维情形, 化标准形会更为复杂. Bourgain^[9] 写到, 当频率大于 2 时, 拟周期解的标准形会更加复杂. Geng 等^[35] 将 Bourgain 的二维不变环面的结果推广, 获得了任意有限维不变环面的存在性, 相比 Bourgain 的结果, 还获得了形式较好的标准形. 对于周期边界条件下的二维三次 Schrödinger 方程

$$iu_t - \Delta u + |u|^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{T}^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

Geng 等给出了拟周期解的证明. 通过仔细选择切频 $\{i_1, \dots, i_b\} \subset \mathbb{Z}^2$, 许多共振项能被避免, 然后得到的标准形尽管依赖角变量 θ , 但比 Bourgain 的标准形简单得多, 易于研究解的线性稳定性等性质. 事实上, 在每一步 KAM 迭代中, 同调方程能被分解成无穷多至多四阶的线性方程组, 最终可以得到一族小振幅的拟周期解 (参见文献 [17, 18]). Eliasson 等^[36] 证明了高维非线性梁方程有小振幅的拟周期解.

KAM 方法的基本思想是构造快速 Newton 迭代程序, KAM 机制由无穷多的 KAM 迭代步骤组成. 大致的想法就是, 在每步迭代中通过坐标变换将 Hamilton 函数变为一个好的标准形加上一个更小的扰动. 为了达到这个目的, 我们不得不求解一些同调方程, 为了使切频和法频 (无穷多个) 一起满

足非共振条件. 为了满足这些非共振条件, 我们不得不挖掉一些参数. 所以整个过程主要包括两个部分: 一是构造迭代程序, 在每一步的迭代过程中, 通过坐标变换并利用同调方程来消掉 Hamilton 函数中的不可积部分, 即含有角变量的部分, 使得当扰动参数趋于 0 时, 新产生的扰动项是上一步扰动项的高阶无穷小; 二是构造收敛域, 每次迭代中都要从作用变量的定义域中“挖掉”可能使迭代不收敛的变量的取值部分, 最终使迭代在一个正测度集合上收敛. 在 KAM 迭代中, 在挖掉参数集的一个小集合和范数权重收缩的意义下, 我们使每一步的扰动都比前一步小. 最后需要证明无穷次 KAM 迭代是收敛的, 并且挖掉的参数测度是小的, 留下的是一个正测度的参数集 (关于有限维和无穷维空间上的 KAM 理论参见文献 [37]).

本文继续延续文献 [35] 中容许集的想法, 推广到六点的情形. 同样, 我们的方程不含有外部参数, 一样需要使用文献 [35] 中化标准形的技巧, 从非线性项提取出来参数, 相比我们非线性项为五次, 标准形会更加复杂. 我们还会展示, 为了标准形有一个好的形式, 将通过一个辛变换将标准形变成常系数的. 我们的证明想法沿袭文献 [35] 中的证明思路. 对于测度估计, 相比于 Eliasson 和 Kuksin 的 Lipschitz 域的概念, 我们利用了衰减性质, 使整个证明更简洁, 更接近传统的 KAM. 在测度估计中, 对于固定的 n , 我们需要挖掉参数集的一个小测度集, 但是对于可列的 $n \in \mathbb{Z}_1^2$ 挖掉的小测度之和不一定还是小的; 我们也知道, Schrödinger 方程法频的正则性较差, 这就使得测度估计发生了困难. 我们为了后面测度估计能进行, 提取了 Töplitz-Lipschitz 性质. 这个性质主要描述的是扰动项当 $n \rightarrow \infty$ 时的逼近程度, 存在某个充分大的整数 N , 对于可列的 $n \geq N$, 我们可以利用 Töplitz-Lipschitz 性质进行测度估计, 这说明对于可列的 n , 我们总共挖掉参数集的一个小测度集合; 对于 $|n| < N$, 我们知道 n 的个数是有限的; 对于一个固定的 n , 我们挖掉参数集的一个小测度集合, 那么, 总共挖掉有限个小测度集合, 挖掉的仍然是一个小测度的. 所以, 最终可以进行测度估计, 这说明经过无穷步的 KAM 迭代, 我们挖掉的是一个参数集上的小测度集合. 为了解同调方程的便利, 我们同样从 Hamilton 函数非线性部分的结构提取到 (A5) (见本文第 2 节), 一些不好处理的项, 由于扰动满足零动量和 gauge 不变性质, 这些难处理的项系数为 0. 本文通过仔细选择切方向, 推广了六点容许集概念, 使得对于给定的 n , 出现至多一种完全共振的情形, 为后面解同调方程提供了方便, 得到了无穷多个至多四阶的线性方程组. 最终得到了方程的一族小振幅的拟周期解.

在周期边界条件下,

$$u(t, x_1 + 2\pi, x_2) = u(t, x_1, x_2 + 2\pi) = u(t, x_1, x_2),$$

考虑二维非线性五次 Schrödinger 方程

$$iu_t - \Delta u + |u|^4 u = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{T}^2. \quad (1.1)$$

准确地说, 相比文献 [35], 我们的标准形会更复杂. 算子 $A = -\Delta$ 在周期边界条件下有特征值 $\{\lambda_n\}$ 满足

$$\lambda_n = |n|^2 = |n_1|^2 + |n_2|^2, \quad n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2,$$

并且对应的特征向量 $\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\langle n, x \rangle}$ 组成一组基. 在陈述主要结果之前, 我们陈述容许集的性质.

有限点集 $S = \{i_1, \dots, i_b\} \subset \mathbb{Z}^2$ ($b > 6$) 称为容许集 (admissible set), 如果下列条件成立.

(1) 对于任意的六元数组 $\{i, j, k, l, m, n\}$, S 不包含其中任意 5 个点, 满足 $n - m + i - j + k - l = 0$ 和 $|n|^2 - |m|^2 + |i|^2 - |j|^2 + |k|^2 - |l|^2 = 0$ 或者满足 $n + m + i - j - k - l = 0$ 和 $|n|^2 + |m|^2 + |i|^2 - |j|^2 - |k|^2 - |l|^2 = 0$.

(2) 对于任意的 $n \in \mathbb{Z}^2 \setminus S$, 至多存在一个五元数组 $\{i, j, k, l, m\}$, 其中 $i, j, k, l \in S, m \in \mathbb{Z}^2 \setminus S$, 满足 $n - m + i - j + k - l = 0$ 和 $|n|^2 - |m|^2 + |i|^2 - |j|^2 + |k|^2 - |l|^2 = 0$. 如果有这样的五元数组存在, 则称 n 和 m 是第一类共振. 由定义知, n 和 m 相互唯一确定. 我们称 (n, m) 是第一类共振对 (记为 $n, m \in \mathcal{L}_1$).

(3) 对于任意的 $n \in \mathbb{Z}^2 \setminus S$, 至多存在一个五元数组 $\{i, j, k, l, m\}$, 其中 $i, j, k, l \in S, m \in \mathbb{Z}^2 \setminus S$, 满足 $n + m + i - j - k - l = 0$ 和 $|n|^2 + |m|^2 + |i|^2 - |j|^2 - |k|^2 - |l|^2 = 0$. 如果有这样的五元数组存在, 则称 n 和 m 是第二类共振. 由定义知, n 和 m 相互唯一确定. 我们称 (n, m) 是第二类共振对 ($n, m \in \mathcal{L}_2$).

(4) 任意的 $n \in \mathbb{Z}^2 \setminus S$ 不能既是第一类共振又是第二类共振, 也就是说, 不存在 $i, j, k, l, f, g, h, p \in S$ 和 $m, m' \in \mathbb{Z}^2 \setminus S$, 满足

$$\begin{cases} n - m + i - j + k - l = 0, \\ |n|^2 - |m|^2 + |i|^2 - |j|^2 + |k|^2 - |l|^2 = 0, \\ n + m' + f - g - h - p = 0, \\ |n|^2 + |m'|^2 + |f|^2 - |g|^2 - |h|^2 - |p|^2 = 0. \end{cases}$$

构造容许集的方法来自文献 [35], 但这里由 4 点共振变为 6 点共振, 我们将在引理 A.4 中给出新的证明.

现在陈述主要结果:

定理 1.1 令 $S = \{i_1, \dots, i_b\} \subset \mathbb{Z}^2$ ($b > 6$) 是容许集. 存在一个正测度的 Cantor 集 $\mathcal{C}$, 使得对于任意的 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_b) \in \mathcal{C}$, 当 $(\xi^T M \xi)^2 < 144 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l$ 时, 非线性 Schrödinger 方程 (1.1) 有如下形式的一族小振幅解析的拟周期解:

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^b \sqrt{\xi_j} e^{i \omega_j t} \phi_{i_j} + O(|\xi|^{\frac{3}{2}}), \quad \omega_j = |i_j|^2 + O(|\xi|^2).$$

注 1.1 我们需要条件 $(\xi^T M \xi)^2 < 144 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l$, 使得我们获得的环面是部分双曲的. 当 $(\xi^T M \xi)^2 \geq 144 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l$ 时, 我们同样可以证明椭圆环面的存在, 只是证明会更复杂. 我们在后续的文章中会考虑这个问题.

上述定理是一个无穷维 KAM 定理的直接推论, 为了给出这个无穷维 KAM 定理, 我们需要给出一些记号和范数的说明, 并且详细论述 Hamilton 系统的一些内在结构, 例如, 非退化条件、法频的渐近增长性、扰动的正则性、Melnikov 非共振条件和 Töplitz-Lipschitz 性质, 以及由某些特殊非线性项决定的零动量条件和 gauge 不变性. 第 2 节给出一个无穷维 KAM 定理. 第 3 节证明这个定理. 第 4 节应用这个定理到二维非线性五次 Schrödinger 方程.

2 Hamilton 偏微分方程的无穷维 KAM 定理

首先引入一些记号, 集合 $\{i_1, \dots, i_b\}$ 是 $\mathbb{Z}^2$ 中给定的 b 个向量. 记 $\mathbb{Z}_1^2 = \mathbb{Z}^2 \setminus \{i_1, \dots, i_b\}$, 令 $z = (\dots, z_n, \dots)_{n \in \mathbb{Z}_1^2}$, 它的复共轭 $\bar{z} = (\dots, \bar{z}_n, \dots)_{n \in \mathbb{Z}_1^2}$. 加权范数

$$\|z\|_\rho = \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2} |z_n| e^{|n|\rho},$$

其中 $|n| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$, $n = (n_1, n_2)$, 并且 $\rho > 0$. 定义 $\mathbb{T}^b \times \{I = 0\} \times \{z = 0\} \times \{\bar{z} = 0\}$ 的如下一个邻域:

$$D_\rho(r, s) = \{(\theta, I, z, \bar{z}) : |\operatorname{Im}\theta| < r, |I| < s^2, \|z\|_\rho < s, \|\bar{z}\|_\rho < s\},$$

其中 $|\cdot|$ 指复向量的上确界范数. 更多地, 我们用 $\mathcal{O}$ 表示在 $\mathbb{R}^b$ 中的一个正测度的参数集.

记 $\alpha \equiv (\dots, \alpha_n, \dots)_{n \in \mathbb{Z}_1^2}$, $\beta \equiv (\dots, \beta_n, \dots)_{n \in \mathbb{Z}_1^2}$, $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{N}$, 并且 α 和 β 是只含有有限多个正整数的非负整数元素的向量. 记乘积 $z^\alpha \bar{z}^\beta$ 表示 $\prod_n z_n^{\alpha_n} \bar{z}_n^{\beta_n}$. 对于给定的函数

$$F(\theta, I, z, \bar{z}) = \sum_{\alpha, \beta} F_{\alpha\beta}(\theta, I) z^\alpha \bar{z}^\beta, \quad (2.1)$$

其中 $F_{\alpha\beta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^b, l \in \mathbb{N}^b} F_{kl\alpha\beta}(\xi) I^l e^{i\langle k, \theta \rangle}$ 在 Whitney 意义下是关于参数 ξ 的 C_W^8 函数, 定义

$$\|F\|_{\mathcal{O}} = \sum_{\alpha, \beta, k, l} |F_{kl\alpha\beta}|_{\mathcal{O}} |I^l| e^{|\langle k, \theta \rangle|} |z^\alpha| |\bar{z}^\beta|, \quad (2.2)$$

其中

$$|F_{kl\alpha\beta}|_{\mathcal{O}} \equiv \sup_{\xi \in \mathcal{O}} \sum_{0 \leq d \leq 8} |\partial_\xi^d F_{kl\alpha\beta}|$$

(对参数 ξ 的导数都是在 Whitney 意义下). 定义 F 的加权范数¹⁾

$$\|F\|_{D_\rho(r, s), \mathcal{O}} \equiv \sup_{D_\rho(r, s)} \|F\|_{\mathcal{O}}. \quad (2.3)$$

对于一个函数 F , 定义由 F 生成的向量场

$$X_F = (F_I, -F_\theta, \{iF_{z_n}\}_{n \in \mathbb{Z}_1^2}, \{-iF_{\bar{z}_n}\}_{n \in \mathbb{Z}_1^2}).$$

向量场的范数

$$\begin{aligned} \|X_F\|_{D_\rho(r, s), \mathcal{O}} &\equiv \|F_I\|_{D_\rho(r, s), \mathcal{O}} + \frac{1}{s^2} \|F_\theta\|_{D_\rho(r, s), \mathcal{O}} \\ &+ \sup_{D_\rho(r, s)} \left[\frac{1}{s} \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2} \|F_{z_n}\|_{\mathcal{O}} e^{|n|\rho} + \frac{1}{s} \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2} \|F_{\bar{z}_n}\|_{\mathcal{O}} e^{|n|\rho} \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

现在叙述 Hamilton 函数. 令

$$\begin{aligned} H_0 &= N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}}, \\ N &= \langle \omega(\xi), I \rangle + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2} \Omega_n(\xi) z_n \bar{z}_n \\ &+ \sum_{n \in \mathcal{L}_2} [(\Omega_n - (\omega_k - \omega_i)) z_n \bar{z}_n + (\Omega_m - (\omega_j + \omega_l)) z_m \bar{z}_m], \end{aligned}$$

(i, j, k, l) 由对应的共振对 (n, m) 唯一确定. 上式中

$$\mathcal{B} = \sum_{n \in \mathcal{L}_2} \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} z_n z_m,$$

1) 在 (2.3) 中, 我们定义了标量函数的范数 $\|\cdot\|_{D_\rho(r, s), \mathcal{O}}$. 对于向量函数 $G : D_\rho(r, s) \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}^m$ ($m < \infty$), 可以类似定义为 $\|G\|_{D_\rho(r, s), \mathcal{O}} = \sum_{i=1}^m \|G_i\|_{D_\rho(r, s), \mathcal{O}}$.

$$\bar{\mathcal{B}} = \sum_{n \in \mathcal{L}_2} \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} \bar{z}_n \bar{z}_m,$$

其中参数 $\xi \in \mathcal{O}$, 相空间的辛结构为 $dI \wedge d\theta + i \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2} dz_n \wedge d\bar{z}_n$.

对于任意的 $\xi \in \mathcal{O}$, 对应于 H_0 的 Hamilton 方程有对应于相空间的不变环面的特解 $(\theta, 0, 0, 0) \rightarrow (\theta + \omega t, 0, 0, 0)$.

现在考虑扰动的 Hamilton 函数

$$H = H_0 + P = N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P(\theta, I, z, \bar{z}, \xi). \quad (2.5)$$

我们的目标是证明, 对于绝大多数参数值 $\xi \in \mathcal{O}$ (在 Lebesgue 测度意义下), 如果 $\|X_P\|_{D_\rho(r,s), \mathcal{O}}$ 充分小, Hamilton 函数 $H = N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P$ 仍然有不变环面.

下面需要提取切频 $\omega(\xi)$ 、法频 $\Omega_n(\xi)$ 和扰动 P 的一些性质出来:

(A1) 非退化条件: 假设对于任意的 $\xi \in \mathcal{O}$, 有

$$\begin{cases} \text{rank} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \xi}, \dots, \frac{\partial \omega_b}{\partial \xi} \right) = \kappa, \\ \text{rank} \left(\frac{\partial^{|\beta|} \omega}{\partial \xi^\beta} \mid \forall \beta, 1 \leq |\beta| \leq b - \kappa + 1 \right) = b, \end{cases} \quad (2.6)$$

其中 κ 是 $1 \leq \kappa \leq b$ 的一个给定的整数, $\frac{\partial \omega_1}{\partial \xi}, \dots, \frac{\partial \omega_b}{\partial \xi}$ 是向量关于参数 ξ 的所有一阶偏导数, 对于一个固定的 β , 有 $\frac{\partial^{|\beta|} \omega}{\partial \xi^\beta} = (\frac{\partial^{|\beta|} \omega_1}{\partial \xi^\beta}, \dots, \frac{\partial^{|\beta|} \omega_b}{\partial \xi^\beta})$.

(A2) 法频的渐近增长性:

$$\Omega_n = \varepsilon^{-a} |n|^2 + \tilde{\Omega}_n, \quad a \geq 0, \quad (2.7)$$

其中 $\tilde{\Omega}_n$ 是关于 ξ 的 $C_W^8(\mathcal{O})$ 函数, 并且 $C_W^8(\mathcal{O})$ -范数有上界 $L > 0$.

(A3) Melnikov 非共振条件: 令

$$\mathcal{M}_n = \begin{pmatrix} \Omega_n + \omega_i - \omega_k & -\frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} \\ \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} & -(\Omega_m - \omega_j - \omega_l) \end{pmatrix}, \quad n \in \mathcal{L}_2,$$

其中 (i, j, k, l) 由对应的共振对 (n, m) 唯一确定. 假设 $\omega(\xi), A_n(\xi) \in C_W^8(\mathcal{O})$, 存在 $\gamma, \tau > 0$ 满足 (I_2 是 2×2 单位矩阵, I_4 是 4×4 单位矩阵)

$$\begin{aligned} |\langle k, \omega \rangle| &\geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \quad |k| > 0, \\ |\langle k, \omega \rangle \pm \Omega_n| &\geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \quad n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2, \\ |\langle k, \omega \rangle \pm \Omega_n \pm \Omega_m| &\geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2, \\ |\det(\langle k, \omega \rangle I_4 \pm \mathcal{M}_n \otimes I_2 \pm I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'})| &\geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \quad k \neq 0, \quad n, n' \in \mathcal{L}_2. \end{aligned}$$

假设 $\mathcal{M}_n$ ($n \in \mathcal{L}_2$) 的特征值有非零的虚部使得我们获得的环面是部分双曲的.

(A4) $\mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P$ 的正则性: $\mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P$ 关于 I, θ, z 和 $\bar{z}$ 是实解析的, 并且关于 ξ 是 C_W^8 光滑的; 另外,

$$\|X_{\mathcal{B}}\|_{D_\rho(r,s), \mathcal{O}} < 1, \quad \|X_P\|_{D_\rho(r,s), \mathcal{O}} < \varepsilon.$$

(A5) 扰动的零动量性质和 gauge 不变性质: $\mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P$ 有接下来的零动量性质和 gauge 不变性质

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P : \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P = \sum_{k \in \mathbb{Z}^b, l \in \mathbb{N}^b, \alpha, \beta} (\mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P)_{kl\alpha\beta}(\xi) I^l e^{i\langle k, \theta \rangle} z^\alpha \bar{z}^\beta \right\},$$

其中 k, α 和 β 有如下关系:

$$\sum_{j=1}^b k_j i_j + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2} (\alpha_n - \beta_n) n = 0, \quad (2.8)$$

$$\sum_{j=1}^b k_j + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2} (\alpha_n - \beta_n) = 0. \quad (2.9)$$

(A6) Töplitz-Lipschitz 性质: 对于任意固定的 $n, m \in \mathbb{Z}^2, c \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, 极限

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial^2(\mathcal{B} + P)}{\partial z_{n+tc} \partial \bar{z}_{m-tc}}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial^2(\sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2} \tilde{\Omega}_n z_n \bar{z}_n + P)}{\partial z_{n+tc} \partial \bar{z}_{m+tc}}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial^2(\bar{\mathcal{B}} + P)}{\partial \bar{z}_{n+tc} \partial \bar{z}_{m-tc}}$$

都存在. 更多地, 存在 $K > 0$, 使得当 $|t| > K$ 时, $N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P$ 满足

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2(\mathcal{B} + P)}{\partial z_{n+tc} \partial \bar{z}_{m-tc}} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial^2(\mathcal{B} + P)}{\partial z_{n+tc} \partial \bar{z}_{m-tc}} \right\|_{D_\rho(r,s), \mathcal{O}} &\leq \frac{\varepsilon}{|t|} e^{-|n+m|\rho}, \\ \left\| \frac{\partial^2(\sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2} \tilde{\Omega}_n z_n \bar{z}_n + P)}{\partial z_{n+tc} \partial \bar{z}_{m+tc}} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial^2(\sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2} \tilde{\Omega}_n z_n \bar{z}_n + P)}{\partial z_{n+tc} \partial \bar{z}_{m+tc}} \right\|_{D_\rho(r,s), \mathcal{O}} &\leq \frac{\varepsilon}{|t|} e^{-|n-m|\rho}, \\ \left\| \frac{\partial^2(\bar{\mathcal{B}} + P)}{\partial \bar{z}_{n+tc} \partial \bar{z}_{m-tc}} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial^2(\bar{\mathcal{B}} + P)}{\partial \bar{z}_{n+tc} \partial \bar{z}_{m-tc}} \right\|_{D_\rho(r,s), \mathcal{O}} &\leq \frac{\varepsilon}{|t|} e^{-|n+m|\rho}. \end{aligned}$$

最后, 陈述无穷维的 KAM 定理.

定理 2.1 假设 (2.5) 中的 Hamilton 函数 $H_0 + P$ 满足假设 (A1)–(A6). 令 $\gamma > 0$ 充分小, 存在一个正数 $\varepsilon = \varepsilon(b, K, \tau, \gamma, r, s, \rho)$, 使得如果 $\|X_P\|_{D_\rho(r,s), \mathcal{O}} < \varepsilon$, 则有如下结论: 存在一个 Cantor 集 $\mathcal{O}_\gamma \subset \mathcal{O}$ ($\text{meas}(\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_\gamma) = O(\gamma^{\frac{1}{8}})$) 和下面两个关于 θ 解析并且含参数 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_b)$ 的 $\mathcal{O}_W^8$ 映射

$$\Psi : \mathbb{T}^b \times \mathcal{O}_\gamma \rightarrow D_\rho(r, s), \quad \tilde{\omega} : \mathcal{O}_\gamma \rightarrow \mathbb{R}^b,$$

其中 Ψ 是 $\frac{\varepsilon}{\gamma^8}$ - 接近于平凡嵌入 $\Psi_0 : \mathbb{T}^b \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{T}^b \times \{0, 0, 0\}$; $\tilde{\omega}$ 是 ε - 接近于未扰动频率 ω . 对于任意的 $\xi \in \mathcal{O}_\gamma$ 和 $\theta \in \mathbb{T}^b$, 曲线 $t \rightarrow \Psi(\theta + \tilde{\omega}(\xi)t, \xi)$ 是 Hamilton 方程 $H = H_0 + P$ 的拟周期解. 我们获得的环面是部分双曲的.

3 KAM 迭代

我们用包含无穷多次变量变换的 KAM 迭代来证明定理 2.1. 在 KAM 迭代中, 在挖掉参数集的一个小集合和范数权重收缩的意义下, 使每一步的扰动都比前一步小. 最后需要证明无穷次 KAM 迭代是收敛的, 并且挖掉的参数测度是小的, 留下的是一个正测度的参数集.

在第 ν 步 KAM 迭代, 考虑 Hamilton 函数

$$H_\nu = N_\nu + \mathcal{B}_\nu + \bar{\mathcal{B}}_\nu + P_\nu,$$

其中 $\mathcal{B}_\nu + \bar{\mathcal{B}}_\nu + P_\nu$ 定义在 $D_{\rho_\nu}(r_\nu, s_\nu) \times \mathcal{O}_\nu$ 上并且满足假设 (A1)–(A6).

接下来, 构造一个映射

$$\Phi_\nu : D_{\rho_\nu}(r_{\nu+1}, s_{\nu+1}) \times \mathcal{O}_\nu \rightarrow D_{\rho_\nu}(r_\nu, s_\nu) \times \mathcal{O}_\nu,$$

使得

$$H_{\nu+1} = H_\nu \circ \Phi_\nu = N_{\nu+1} + \mathcal{B}_{\nu+1} + \bar{\mathcal{B}}_{\nu+1} + P_{\nu+1}, \quad (3.1)$$

满足在 $D_{\rho_{\nu+1}}(r_{\nu+1}, s_{\nu+1}) \times \mathcal{O}_\nu$ 上符合上述全部的迭代假设 (A1)–(A6). 更多地,

$$\|X_{P_{\nu+1}}\|_{D_{\rho_{\nu+1}}(r_{\nu+1}, s_{\nu+1}), \mathcal{O}_\nu} = \|X_{H_\nu \circ \Phi_\nu} - X_{N_{\nu+1} + \mathcal{B}_{\nu+1} + \bar{\mathcal{B}}_{\nu+1}}\|_{D_{\rho_{\nu+1}}(r_{\nu+1}, s_{\nu+1}), \mathcal{O}_\nu} \leq \varepsilon_{\nu+1}.$$

为了简化记号, 接下来, 没有上标和下标的项代表在第 ν 步的项, 而有上标或下标的项代表在第 $\nu+1$ 步的项. 考虑定义在 $D_\rho(r, s) \times \mathcal{O}$ 上的 Hamilton 函数

$$\begin{aligned} H &= N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P \\ &= e + \langle \omega(\xi), I \rangle + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2} \Omega_n(\xi) z_n \bar{z}_n + \sum_{n \in \mathcal{L}_2} [(\Omega_n - (\omega_k - \omega_i)) z_n \bar{z}_n + (\Omega_m - (\omega_j + \omega_l)) z_m \bar{z}_m] \\ &\quad + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P(\theta, I, z, \bar{z}, \xi, \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.2)$$

假设 $|k| \leq K$,

$$\begin{aligned} |\langle k, \omega \rangle| &\geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \quad k \neq 0, \\ |\langle k, \omega \rangle \pm \Omega_n| &\geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \quad n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2, \\ |\langle k, \omega \rangle \pm \Omega_n \pm \Omega_m| &\geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2, \\ |\det(\langle k, \omega \rangle I_4 \pm \mathcal{M}_n \otimes I_2 \pm I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'})| &\geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \quad k \neq 0, \quad n, n' \in \mathcal{L}_2, \end{aligned}$$

其中 (n, m) 是共振对, (i, j, k, l) 被 (n, m) 唯一确定. 更多地, $N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P$ 满足假设 (A4)–(A6).

令 $0 < r_+ < r$, 定义

$$s_+ = \frac{1}{4} s \varepsilon^{\frac{1}{3}}, \quad \varepsilon_+ = c \gamma^{-9} K^{9(\tau+1)} (r - r_+)^{-c} \varepsilon^{\frac{4}{3}}. \quad (3.3)$$

接下来, 叙述怎么构造一个集合 $\mathcal{O}_+ \subset \mathcal{O}$ 和一个变量变换 $\Phi : D_+ \times \mathcal{O}_+ = D_\rho(r_+, s_+) \times \mathcal{O}_+ \rightarrow D_\rho(r, s) \times \mathcal{O}$, 使得变换过后的 Hamilton 函数 $H_+ = N_+ + \mathcal{B}_+ + \bar{\mathcal{B}}_+ + P_+ \equiv H \circ \Phi$ 对于新的 s_+ 、 ε_+ 、 r_+ 和 $\xi \in \mathcal{O}_+$ 仍然满足所有的迭代假设.

3.1 解同调方程

将 P 展成 Fourier-Taylor 级数

$$P = \sum_{k, l, \alpha, \beta} P_{kl\alpha\beta} e^{i\langle k, \theta \rangle} I^l z^\alpha \bar{z}^\beta,$$

其中 $k \in \mathbb{Z}^b$, $l \in \mathbb{N}^b$, 多重指标 α 和 β 取遍所有无限维的只含有有限多个正整数的非负整数元素的向量 $\alpha \equiv (\dots, \alpha_n, \dots)_{n \in \mathbb{Z}_1^2}$, $\beta \equiv (\dots, \beta_n, \dots)_{n \in \mathbb{Z}_1^2}$. 令 R 是扰动项 P 的截断, 形式如下:

$$\begin{aligned} R(\theta, I, z, \bar{z}) &= R_0 + R_1 + R_2 \\ &= \sum_{|k| \leq K, |l| \leq 1} P_{kl00} I^l e^{i\langle k, \theta \rangle} + \sum_{|k| \leq K, n} (P_n^{k10} z_n + P_n^{k01} \bar{z}_n) e^{i\langle k, \theta \rangle} \\ &\quad + \sum_{|k| \leq K, n, m} (P_{nm}^{k20} z_n z_m + P_{nm}^{k02} \bar{z}_n \bar{z}_m) e^{i\langle k, \theta \rangle} + \sum_{|k| \leq K, n, m} P_{nm}^{k11} z_n \bar{z}_m e^{i\langle k, \theta \rangle}. \end{aligned}$$

将 H 写成 $H = N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + R + (P - R)$. 通过在 (3.3) 中 s_+ 的选择和范数的定义, 紧接着有

$$\|X_R\|_{D_\rho(r, s), \mathcal{O}} \leq \|X_P\|_{D_\rho(r, s), \mathcal{O}} \leq \varepsilon. \quad (3.4)$$

更多地, 取 $s_+ \ll s$ 使得在 $D_\rho(r, s_+)$ 上, 有

$$\|X_{(P-R)}\|_{D_\rho(r, s_+)} < c\varepsilon_+. \quad (3.5)$$

接下来, 要找一个定义在 $D_+ = D_\rho(r_+, s_+)$ 上的函数 F , 它的 Hamilton 向量场 X_F 对应的流映射的时间 1 映射 ϕ_F^1 , 定义了一个 $D_+ \rightarrow D$ 的映射, 将 H 变成 H_+ . 通过二阶 Taylor 公式, 有

$$\begin{aligned} H \circ \phi_F^1 &= (N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + R) \circ \phi_F^1 + (P - R) \circ \phi_F^1 \\ &= N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + \{N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}}, F\} + R \\ &\quad + \int_0^1 (1-t) \{\{N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}}, F\}, F\} \circ \phi_F^t dt \\ &\quad + \int_0^1 \{R, F\} \circ \phi_F^t dt + (P - R) \circ \phi_F^1 \\ &= N_+ + \mathcal{B}_+ + \bar{\mathcal{B}}_+ + P_+ + \{N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}}, F\} + R \\ &\quad - P_{0000} - \langle \hat{\omega}, I \rangle - \sum_n P_{nn}^{011} z_n \bar{z}_n - \hat{\mathcal{B}} - \hat{\bar{\mathcal{B}}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= \int \frac{\partial P}{\partial I} d\theta \Big|_{z=\bar{z}=0, I=0}, \\ \hat{\mathcal{B}} &= \sum_{n \in \mathcal{L}_2} P_{nn}^{020} z_n z_n, \\ \hat{\bar{\mathcal{B}}} &= \sum_{n \in \mathcal{L}_2} P_{nn}^{002} \bar{z}_n \bar{z}_n, \\ N_+ &= N + P_{0000} + \langle \hat{\omega}, I \rangle + \sum_n P_{nn}^{011} z_n \bar{z}_n, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\mathcal{B}_+ = \mathcal{B} + \hat{\mathcal{B}}, \quad (3.8)$$

$$\bar{\mathcal{B}}_+ = \bar{\mathcal{B}} + \hat{\bar{\mathcal{B}}} = \bar{\mathcal{B}} + \bar{\hat{\mathcal{B}}}, \quad (3.9)$$

$$P_+ = \int_0^1 (1-t) \{\{N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}}, F\}, F\} \circ \phi_F^t dt + \int_0^1 \{R, F\} \circ \phi_F^t dt + (P - R) \circ \phi_F^1. \quad (3.10)$$

我们可以找一个函数 F :

$$F(\theta, I, z, \bar{z}) = F_0 + F_1 + F_2,$$

其中

$$\begin{aligned} F_0 &= \sum_{0 < |k| \leq K, |l| \leq 1} F_{kl00} e^{i\langle k, \theta \rangle} I^l, \\ F_1 &= \sum_{|k| \leq K, n \in \mathcal{L}_2} (F_n^{k10} z_n + F_m^{k10} z_m + F_n^{k01} \bar{z}_n + F_m^{k01} \bar{z}_m) e^{i\langle k, \theta \rangle} \\ &\quad + \sum_{|k| \leq K, n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2} (F_n^{k10} z_n + F_n^{k01} \bar{z}_n) e^{i\langle k, \theta \rangle}, \\ F_2 &= \sum_{|k| \leq K, n \in \mathcal{L}_2, n' \in \mathcal{L}_2, |k| + |n - n'| \neq 0} (F_{n'n}^{k11} z_{n'} \bar{z}_n + F_{nn'}^{k11} z_n \bar{z}_{n'}) e^{i\langle k, \theta \rangle} \\ &\quad + \sum_{|k| \leq K, n \in \mathcal{L}_2, n' \in \mathcal{L}_2, |k| + |n - m'| \neq 0} (F_{m'n}^{k11} z_{m'} \bar{z}_n + F_{nm'}^{k11} z_n \bar{z}_{m'}) e^{i\langle k, \theta \rangle} \\ &\quad + \sum_{|k| \leq K, n \in \mathcal{L}_2, n' \in \mathcal{L}_2, |k| + |m - n'| \neq 0} (F_{n'm}^{k11} z_{n'} \bar{z}_m + F_{mn'}^{k11} z_m \bar{z}_{n'}) e^{i\langle k, \theta \rangle} \\ &\quad + \sum_{|k| \leq K, n \in \mathcal{L}_2, n' \in \mathcal{L}_2, |k| + |m - m'| \neq 0} (F_{m'm}^{k11} z_{m'} \bar{z}_m + F_{mm'}^{k11} z_m \bar{z}_{m'}) e^{i\langle k, \theta \rangle} \\ &\quad + \sum_{|k| \leq K, n \in \mathcal{L}_2, n' \in \mathcal{L}_2, |k| + |n - m'| \neq 0 \text{ 或 } |k| + |n' - m| \neq 0} (F_{n'n}^{k20} z_{n'} z_n + F_{n'n}^{k02} \bar{z}_{n'} \bar{z}_n) e^{i\langle k, \theta \rangle} \\ &\quad + \sum_{|k| \leq K, n \in \mathcal{L}_2, n' \in \mathcal{L}_2, |k| + |m - m'| \neq 0 \text{ 或 } |k| + |n' - n| \neq 0} (F_{m'n}^{k20} z_{m'} z_n + F_{m'n}^{k02} \bar{z}_{m'} \bar{z}_n) e^{i\langle k, \theta \rangle} \\ &\quad + \sum_{|k| \leq K, n \in \mathcal{L}_2, n' \in \mathcal{L}_2, |k| + |m - m'| \neq 0 \text{ 或 } |k| + |n' - n| \neq 0} (F_{n'm}^{k20} z_{n'} z_m + F_{n'm}^{k02} \bar{z}_{n'} \bar{z}_m) e^{i\langle k, \theta \rangle} \\ &\quad + \sum_{|k| \leq K, n \in \mathcal{L}_2, n' \in \mathcal{L}_2, |k| + |n - m'| \neq 0 \text{ 或 } |k| + |n' - m| \neq 0} (F_{m'm}^{k20} z_{m'} z_m + F_{m'm}^{k02} \bar{z}_{m'} \bar{z}_m) e^{i\langle k, \theta \rangle} \\ &\quad + \sum_{|k| \leq K, n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2, m \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2} (F_{nm}^{k20} z_n z_m + F_{nm}^{k02} \bar{z}_n \bar{z}_m) e^{i\langle k, \theta \rangle} \\ &\quad + \sum_{|k| \leq K, n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2, m \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2, |k| + |n - m| \neq 0} (F_{nm}^{k11} z_n \bar{z}_m + F_{mn}^{k11} z_m \bar{z}_n) e^{i\langle k, \theta \rangle} \\ &\quad + \sum_{|k| \leq K, n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2, n' \in \mathcal{L}_2} (F_{nn'}^{k20} z_n z_{n'} + F_{nn'}^{k20} z_n z_{m'}) e^{i\langle k, \theta \rangle} \\ &\quad + \sum_{|k| \leq K, n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2, n' \in \mathcal{L}_2} (F_{nn'}^{k02} \bar{z}_n \bar{z}_{n'} + F_{nn'}^{k02} \bar{z}_n \bar{z}_{m'}) e^{i\langle k, \theta \rangle} \\ &\quad + \sum_{|k| \leq K, n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2, n' \in \mathcal{L}_2} (F_{nn'}^{k11} z_n \bar{z}_{n'} + F_{nn'}^{k11} z_n \bar{z}_{m'} + F_{n'n}^{k11} z_{n'} \bar{z}_n + F_{m'n}^{k11} z_{m'} \bar{z}_n) e^{i\langle k, \theta \rangle}, \end{aligned}$$

满足下面的方程:

$$\{N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}}, F\} + R - P_{0000} - \langle \hat{\omega}, I \rangle - \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} P_{nn}^{011} z_n \bar{z}_n - \hat{\mathcal{B}} - \bar{\hat{\mathcal{B}}} = 0. \quad (3.11)$$

引理 3.1 F 满足等式 (3.11), 如果 F_0 和 F_1 的 Fourier 系数由下面方程确定:

$$\begin{aligned} \langle k, \omega \rangle F_{kl00} &= i P_{kl00}, \quad |l| \leq 1, \quad 0 < |k| \leq K, \\ \langle k, \omega \rangle - \Omega_n F_n^{k10} &= i P_n^{k10}, \quad |k| \leq K, \quad n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2, \\ \langle k, \omega \rangle + \Omega_n F_n^{k01} &= i P_n^{k01}, \quad |k| \leq K, \quad n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2, \\ \langle k, \omega \rangle I_2 - \mathcal{M}_n (F_n^{k10}, F_m^{k01})^T &= i (P_n^{k10}, P_m^{k01})^T, \quad |k| \leq K, \quad n \in \mathcal{L}_2, \\ \langle k, \omega \rangle I_2 + \mathcal{M}_n (F_n^{k01}, F_m^{k10})^T &= i (P_n^{k01}, P_m^{k10})^T, \quad |k| \leq K, \quad n \in \mathcal{L}_2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

F_2 的 Fourier 系数由下面引理得到.

情形 1 $n, m \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2$.

引理 3.2 F 满足等式 (3.11), 如果 F_2 的 Fourier 系数由下面方程确定:

$$\begin{aligned} \langle k, \omega \rangle - \Omega_n - \Omega_m F_{nm}^{k20} &= i P_{nm}^{k20}, \quad |k| \leq K, \\ \langle k, \omega \rangle - \Omega_n + \Omega_m F_{nm}^{k11} &= i P_{nm}^{k11}, \quad 0 < |k| \leq K, \quad |k| + |n - m| \neq 0, \\ \langle k, \omega \rangle + \Omega_n + \Omega_m F_{nm}^{k02} &= i P_{nm}^{k02}, \quad |k| \leq K. \end{aligned} \quad (3.13)$$

情形 2 $n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2, n' \in \mathcal{L}_2$.

引理 3.3 F 满足等式 (3.11), 如果 F_2 的 Fourier 系数由下面方程确定:

$$\begin{aligned} [(\langle k, \omega \rangle - \Omega_n) I_2 - \mathcal{M}_{n'}] (F_{nn'}^{k20}, F_{nm'}^{k11})^T &= i (P_{nn'}^{k20}, P_{nm'}^{k11})^T, \\ [(\langle k, \omega \rangle + \Omega_n) I_2 + \mathcal{M}_{n'}] (F_{nn'}^{k02}, F_{m'n}^{k11})^T &= i (P_{nn'}^{k02}, P_{m'n}^{k11})^T, \\ [(\langle k, \omega \rangle - \Omega_n) I_2 + \mathcal{M}_{n'}] (F_{nn'}^{k11}, F_{nm'}^{k20})^T &= i (P_{nn'}^{k11}, P_{nm'}^{k20})^T, \\ [(\langle k, \omega \rangle + \Omega_n) I_2 - \mathcal{M}_{n'}] (F_{n'n}^{k11}, F_{m'n}^{k02})^T &= i (P_{n'n}^{k11}, P_{m'n}^{k02})^T. \end{aligned} \quad (3.14)$$

情形 3 $n, n' \in \mathcal{L}_2$.

引理 3.4 F 满足等式 (3.11), 如果 F_2 的 Fourier 系数由下面方程确定:

$$\begin{aligned} \langle k, \omega \rangle I_4 - \mathcal{M}_n \otimes I_2 + I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'} (F_{nn'}^{k11}, F_{nm'}^{k20}, F_{mn'}^{k02}, F_{m'm}^{k11})^T &= i (P_{nn'}^{k11}, P_{nm'}^{k20}, P_{mn'}^{k02}, P_{m'm}^{k11})^T, \\ \langle k, \omega \rangle I_4 + \mathcal{M}_n \otimes I_2 - I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'} (F_{n'n}^{k11}, F_{m'n}^{k02}, F_{mn'}^{k20}, F_{mm'}^{k11})^T &= i (P_{n'n}^{k11}, P_{m'n}^{k02}, P_{mn'}^{k20}, P_{mm'}^{k11})^T, \\ \langle k, \omega \rangle I_4 - \mathcal{M}_n \otimes I_2 - I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'} (F_{nn'}^{k20}, F_{nm'}^{k11}, F_{n'm}^{k11}, F_{mm'}^{k02})^T &= i (P_{nn'}^{k20}, P_{nm'}^{k11}, P_{n'm}^{k11}, P_{mm'}^{k02})^T, \\ \langle k, \omega \rangle I_4 + \mathcal{M}_n \otimes I_2 + I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'} (F_{nn'}^{k02}, F_{m'n}^{k11}, F_{mn'}^{k11}, F_{m'm}^{k20})^T &= i (P_{nn'}^{k02}, P_{m'n}^{k11}, P_{mn'}^{k11}, P_{m'm}^{k20})^T. \end{aligned}$$

上述引理证明参见文献 [38].

为了求解方程, 需要接下来的引理.

引理 3.5 令 A 、 B 和 C 分别是 $n \times n$ 、 $m \times m$ 和 $n \times m$ 矩阵, 令 X 是一个 $n \times m$ 未知矩阵. 矩阵方程

$$AX + XB = C$$

有解当且仅当 $I_m \otimes A^T + B \otimes I_n$ 是非退化的.

详细证明参见文献 [26, 附录].

由小除数假设, 有下面的估计:

$$|F_{kl00}|_{\mathcal{O}} \leq \gamma^{-9} K^{9(\tau+1)} |P_{kl00}|_{\mathcal{O}}, \quad 0 < k \leq K,$$

$$\begin{aligned} |F_n^{k10}|_{\mathcal{O}}, |F_n^{k01}|_{\mathcal{O}} &\leq \gamma^{-9} K^{9(\tau+1)} \varepsilon e^{-|k|r} e^{-|n|\rho}, \\ |F_{nn'}^{k11}|_{\mathcal{O}} &\leq \gamma^{-9} K^{9(\tau+1)} \varepsilon e^{-|k|r} e^{-|n-n'|\rho}, \\ |F_{nn'}^{k20}|_{\mathcal{O}} + |F_{nn'}^{k02}|_{\mathcal{O}} &\leq \gamma^{-9} K^{9(\tau+1)} \varepsilon e^{-|k|r} e^{-|n+n'|\rho}. \end{aligned}$$

3.2 估计与性质验证

3.2.1 坐标变换的估计

接下来给出向量场 X_F 和流映射 ϕ_F^1 的估计.

引理 3.6 令 $D_i = D(r_+ + \frac{i}{4}(r - r_+), \frac{i}{4}s)$, $0 < i \leq 4$, 则有

$$\|X_F\|_{D_3, \mathcal{O}} \leq c\gamma^{-9} K^{9(\tau+1)} (r - r_+)^{-c} \varepsilon. \quad (3.15)$$

下面的引理给出流映射 ϕ_F^t 的一些估计. (3.16) 用来说明我们的坐标变换是适定的; 等式 (3.17) 将会被用来说明迭代的收敛性.

引理 3.7 令 $\eta = \varepsilon^{\frac{1}{3}}$, $D_{i\eta} = D(r_+ + \frac{i}{4}(r - r_+), \frac{i}{4}\eta s)$, $0 < i \leq 4$. 若 $\varepsilon \ll \frac{1}{2}\gamma^{\frac{27}{2}} K^{-\frac{27}{2}(\tau+1)} (r - r_+)^c$, 则有

$$\phi_F^t : D_{2\eta} \rightarrow D_{3\eta}, \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (3.16)$$

更多地,

$$\|D\phi_F^t - \text{Id}\|_{D_{1\eta}} < c\gamma^{-9} K^{9(\tau+1)} (r - r_+)^{-c} \varepsilon. \quad (3.17)$$

证明 令

$$\|D^m F\|_{D, \mathcal{O}} = \max \left\{ \left\| \frac{\partial^{|i|+|l|+|\alpha|+|\beta|}}{\partial \theta^i \partial I^l \partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} F \right\|_{D, \mathcal{O}}, |i| + |l| + |\alpha| + |\beta| = m \geq 2 \right\}.$$

注意到 F 是一个关于 I 的一次、关于 z 和 $\bar{z}$ 二次的多项式. 由 (2.4)、(3.15) 和 Cauchy 不等式, 对于任意的 $m \geq 2$, 有

$$\|D^m F\|_{D_2, \mathcal{O}} < c\gamma^{-9} K^{9(\tau+1)} (r - r_+)^{-c} \varepsilon. \quad (3.18)$$

为了得到流映射 ϕ_F^t 的估计, 根据积分方程

$$\phi_F^t = \text{Id} + \int_0^t X_F \circ \phi_F^s ds,$$

由 (3.18), 有 $\phi_F^t : D_{2\eta} \rightarrow D_{3\eta}$, $-1 \leq t \leq 1$, 因此,

$$D\phi_F^t = \text{Id} + \int_0^t (DX_F) D\phi_F^s ds = \text{Id} + \int_0^t J(D^2 F) D\phi_F^s ds,$$

其中 J 代表标准辛矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

根据 Gronwall 不等式, 得到

$$\|D\phi_F^t - \text{Id}\| \leq \|D^2 F\| e^{\int_0^1 \|D^2 F\| ds} \leq 2\|D^2 F\| < c\gamma^{-9} K^{9(\tau+1)} (r - r_+)^{-c} \varepsilon. \quad (3.19)$$

证毕. $\square$

3.2.2 新的标准形的估计

上述定义的流映射的时间 1 映射 ϕ_F^1 将 H 变为 $H_+ = N_+ + \mathcal{B}_+ + \bar{\mathcal{B}}_+ + P_+$, 新的标准形

$$\begin{aligned} N_+ &= N + P_{0000} + \langle \hat{\omega}, I \rangle + \sum_n P_{nn}^{011} z_n \bar{z}_n \\ &= e_+ + \langle \omega_+(\xi), I \rangle + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2} \Omega_n^+(\xi) z_n \bar{z}_n \\ &\quad + \sum_{n \in \mathcal{L}_2} [(\Omega_n^+ - (\omega_k - \omega_i)) z_n \bar{z}_n + (\Omega_m^+ - (\omega_j + \omega_l)) z_m \bar{z}_m], \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \omega_+ &= \omega + P_{0l00}(|l| = 1), \\ \Omega_n^+ &= \Omega_n + P_{nn}^{011}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

现在证明新的标准形 N_+ 具有与 N 一样的性质. 通过 X_P 的正则性和 Cauchy 不等式, 有

$$|\omega_+ - \omega| < \varepsilon, \quad |P_{ij+}^{011} - P_{ij}^{011}| < \varepsilon e^{-|i-j|\rho}. \quad (3.21)$$

当 $|k| \leq K$ 时,

$$\begin{aligned} |\langle k, \omega + P_{0l00} \rangle| &\geq |\langle k, \omega \rangle| - \varepsilon K \geq \frac{\gamma}{K^\tau} - \varepsilon K \geq \frac{\gamma}{K_+^\tau}, \\ |\langle k, \omega + P_{0l00} \rangle + \Omega_n^+| &\geq |\langle k, \omega \rangle + \Omega_n| - \varepsilon K \geq \frac{\gamma}{K^\tau} - \varepsilon K \geq \frac{\gamma}{K_+^\tau}. \end{aligned}$$

其他情形类似, 这里省略.

这就意味着在下一步 KAM 迭代中, 当 $|k| \leq K$ 时, 小除数条件自然满足, 就不需要挖掉测度. 在后面的测度估计中将会用到接下来的有界性:

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathcal{O}} \max_{d \leq 8} |\partial_\xi^d (\Omega_n^+ - \Omega_n)| &\leq \varepsilon, \\ \sup_{\xi \in \mathcal{O}} \max_{d \leq 8} |\partial_\xi^d (\omega_+ - \omega)| &\leq \varepsilon, \\ |P_{ij+}^{011} - P_{ij}^{011}|_{\mathcal{O}} &\leq \varepsilon e^{-|i-j|\rho}. \end{aligned}$$

3.2.3 新的扰动项的估计

因为

$$\begin{aligned} P_+ &= \int_0^1 (1-t) \{ \{N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}}, F\}, F \} \circ \phi_F^t dt + \int_0^1 \{R, F\} \circ \phi_F^t dt + (P - R) \circ \phi_F^1 \\ &= \int_0^1 \{R(t), F\} \circ \phi_F^t dt + (P - R) \circ \phi_F^1, \end{aligned}$$

其中 $R(t) = (1-t)(N_+ + \mathcal{B}_+ + \bar{\mathcal{B}}_+ - N - \mathcal{B} - \bar{\mathcal{B}}) + tR$, 因此,

$$X_{P_+} = \int_0^1 (\phi_F^t)^* X_{\{R(t), F\}} dt + (\phi_F^1)^* X_{(P-R)}.$$

根据引理 3.7, 可得

$$\|D\phi_F^t - \text{Id}\|_{D_{1\eta}} < c\gamma^{-9}K^{9(\tau+1)}(r-r_+)^{-c}\varepsilon, \quad -1 \leq t \leq 1,$$

因此,

$$\|D\phi_F^t\|_{D_{1\eta}} \leq 1 + \|D\phi_F^t - \text{Id}\|_{D_{1\eta}} \leq 2, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

由引理 A.3, 可得

$$\|X_{\{R(t), F\}}\|_{D_{2\eta}} \leq c\gamma^{-9}K^{9(\tau+1)}(r-r_+)^{-c}\eta^{-2}\varepsilon^2$$

和

$$\|X_{(P-R)}\|_{D_{2\eta}} \leq c\eta\varepsilon,$$

因此有

$$\|X_{P_+}\|_{D_{\rho(r_+, s_+)}} \leq c\eta\varepsilon + c\gamma^{-9}K^{9(\tau+1)}(r-r_+)^{-c}\eta^{-2}\varepsilon^2 \leq c\varepsilon_+.$$

3.2.4 一步 KAM 迭代后 (A5) 和 (A6) 的验证

现在证明性质 (A5). 因为

$$\begin{aligned} P_+ &= P - R + \{P, F\} + \frac{1}{2!}\{\{N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}}, F\}, F\} + \frac{1}{2!}\{\{P, F\}, F\} \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\{\cdots \{N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}}, \underbrace{F \cdots F}_n\}, F\} + \frac{1}{n!}\{\cdots \{P, \underbrace{F \cdots F}_n\}, F\} + \cdots, \end{aligned}$$

假设 $P \in \mathcal{D}$, 这里是为了确保在每一步 KAM 迭代中都有与第一步一样的形式. 为了完成一步迭代, 需要证明新的扰动项 P_+ 仍然有定义在 (A5) 中的特殊形式, 即需证 $P_+ \in \mathcal{D}$. 因为 $P \in \mathcal{D}$, 所以有 $P - R \in \mathcal{D}$. 更多地,

$$\{N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}}, F\} = P_{0000} + \langle \hat{\omega}, I \rangle + \sum_n P_{nn}^{011} z_n \bar{z}_n + \hat{\mathcal{B}} + \hat{\bar{\mathcal{B}}} - \mathcal{R} \in \mathcal{D}.$$

因此证明的关键点在于证明 $\mathcal{D}$ 在 Poisson 括号运算下是封闭的.

引理 3.8 如果 $G(\theta, I, z, \bar{z}), F(\theta, I, z, \bar{z}) \in \mathcal{D}$, 那么 $B(\theta, I, z, \bar{z}) = \{G, F\} \in \mathcal{D}$.

以上引理的证明参见文献 [22].

根据引理 3.8, 直接可以推出下面的命题.

命题 3.1 新的扰动项 $P_+ \in \mathcal{D}$.

验证了性质 (A5), 接下来验证新的扰动项 P_+ 对于代替了 K, ε 和 ρ 的新的 K_+, ε_+ 和 ρ_+ 也同样满足性质 (A6). 因为

$$\begin{aligned} P_+ &= P - R + \{P, F\} + \frac{1}{2!}\{\{N, F\}, F\} + \frac{1}{2!}\{\{P, F\}, F\} \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\{\cdots \{N, \underbrace{F \cdots F}_n\}, F\} + \frac{1}{n!}\{\cdots \{P, \underbrace{F \cdots F}_n\}, F\} + \cdots, \end{aligned}$$

然后对于一个固定的 $c \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ 和 $|n - m| > K$, 其中 $K \geq \frac{1}{\rho - \rho_+} \ln(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_+})$, 有

$$\left\| \frac{\partial^2(P - R)}{\partial z_{n+tc} \partial \bar{z}_{m+tc}} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial^2(P - R)}{\partial z_{n+tc} \partial \bar{z}_{m+tc}} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{|t|} e^{-|n-m|\rho} \leq \frac{\varepsilon_+}{|t|} e^{-|n-m|\rho_+}.$$

也就是说 $P - R$ 对于代替 K, ε 和 ρ 的新的 K_+, ε_+ 和 ρ_+ 也满足性质 (A6). 证明剩余项也满足性质 (A6) 需要下面的两个引理.

引理 3.9 将 (A6) 中的 ε 替换为 $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$, F 仍然满足性质 (A6).

引理 3.10 假设 P 满足性质 (A6), 将性质 (A6) 中的 ε 替换为 $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$, F 仍然满足性质 (A6), 并且

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_n \partial z_m} = 0(|n + m| > K), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z_n \partial \bar{z}_m} = 0(|n - m| > K), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z}_n \partial \bar{z}_m} = 0(|n + m| > K),$$

然后 $\{P, F\}$ 满足将 ε 替换为 ε_+ 后的性质 (A6).

引理 3.9 和 3.10 的证明参见文献 [35].

到这里一步 KAM 迭代完成.

3.3 迭代引理和收敛性

在论述迭代引理之前, 先说明在迭代过程中参数的选择. 对于任意给定的 $s, \varepsilon, r, \gamma$ 和所有的 $\nu \geq 1$, 定义下面的通项公式:

$$\begin{aligned} r_{\nu+1} &= r \left(1 - \sum_{i=2}^{\nu+2} 2^{-i} \right), \\ \varepsilon_{\nu+1} &= c \gamma^{-9} (r_\nu - r_{\nu+1})^{-c} K_\nu^{9(\tau+1)} \varepsilon_\nu^{\frac{4}{3}}, \\ \eta_{\nu+1} &= \varepsilon_{\nu+1}^{\frac{1}{3}}, \quad L_{\nu+1} = L_\nu + \varepsilon_\nu, \\ s_{\nu+1} &= 2^{-2} \eta_\nu s_\nu = 2^{-2(\nu+1)} \left(\prod_{i=0}^{\nu} \varepsilon_i \right)^{\frac{1}{3}} s_0, \\ \rho_{\nu+1} &= \rho \left(1 - \sum_{i=2}^{\nu+2} 2^{-i} \right), \\ K_{\nu+1} &= c((\rho_\nu - \rho_{\nu+1})^{-1} \ln \varepsilon_{\nu+1}^{-1}), \end{aligned} \tag{3.22}$$

其中字母 c 是常数, 参数 $r_0, \varepsilon_0, L_0, s_0$ 和 K_0 分别定义为 r, ε, L, s 和 $\ln \frac{1}{\varepsilon}$.

3.3.1 迭代引理

前面的分析可以总结如下.

引理 3.11 令 ε 充分小, $\nu \geq 0$. 假设

(1) $N_\nu + \mathcal{B}_\nu + \bar{\mathcal{B}}_\nu$ 是关于参数 ξ 的标准形, 并且在 $\mathbb{R}^b$ 的一个闭子集 $\mathcal{O}_\nu$ 上, 对于所有的 $0 < |k| \leq K_\nu$, 满足

$$\begin{aligned} |\langle k, \omega_\nu \rangle| &\geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \quad k \neq 0, \\ |\langle k, \omega_\nu \rangle \pm \Omega_n^\nu| &\geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \quad n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2, \end{aligned}$$

$$|\langle k, \omega_\nu \rangle \pm \Omega_n^\nu \pm \Omega_m^\nu| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2,$$

$$|\det(\langle k, \omega_\nu \rangle I_4 \pm \mathcal{M}_n^\nu \otimes I_2 \pm I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'}^\nu)| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \quad k \neq 0, \quad n, n' \in \mathcal{L}_2.$$

更多地, 假设 $\omega_\nu(\xi)$ 和 $P_{ij\nu}^{011}(\xi)$ 是 C_W^8 -光滑的并且在 Whitney 意义下满足

$$\sup_{\xi \in \mathcal{O}_\nu} \max_{d \leq 8} \|\partial_\xi^d (\mathcal{M}_n^\nu - \mathcal{M}_n^{\nu-1})\| \leq c\varepsilon_{\nu-1},$$

$$\sup_{\xi \in \mathcal{O}_\nu} \max_{d \leq 8} |\partial_\xi^d (\Omega_n^\nu - \Omega_n^{\nu-1})| \leq \varepsilon_{\nu-1},$$

$$\sup_{\xi \in \mathcal{O}_\nu} \max_{d \leq 8} |\partial_\xi^d (\omega_\nu - \omega_{\nu-1})| \leq \varepsilon_{\nu-1}$$

和

$$|P_{ij\nu}^{011} - P_{ij(\nu-1)}^{011}|_{\mathcal{O}_\nu} \leq \varepsilon_{\nu-1} e^{-|i-j|\rho}.$$

(2) $N_\nu + \mathcal{B}_\nu + \bar{\mathcal{B}}_\nu + P_\nu$ 关于 K_ν 、 ε_ν 和 ρ_ν 满足假设 (A5) 和 (A6), 并且有

$$\|X_{P_\nu}\|_{D(r_\nu, s_\nu), \mathcal{O}_\nu} \leq \varepsilon_\nu.$$

存在一个子集 $\mathcal{O}_{\nu+1} \subset \mathcal{O}_\nu$,

$$\mathcal{O}_{\nu+1} = \mathcal{O}_\nu \setminus (\mathcal{R}^{\nu+1}),$$

$$\mathcal{R}^{\nu+1} = \bigcup_{K_\nu < |k| \leq K_{\nu+1}, n, m, n'} (\mathcal{R}_k^{\nu+1} \cup \mathcal{R}_{kn}^{\nu+1} \cup \mathcal{R}_{knm}^{\nu+1} \cup \mathcal{C}_{knn'}^{\nu+1}(\gamma)),$$

其中

$$\mathcal{R}_k^{\nu+1} = \left\{ \xi \in \mathcal{O}_\nu : |\langle k, \omega_{\nu+1} \rangle| < \frac{\gamma}{K_{\nu+1}^\tau}, |k| \neq 0 \right\},$$

$$\mathcal{R}_{kn}^{\nu+1} = \left\{ \xi \in \mathcal{O}_\nu : |\langle k, \omega_{\nu+1} \rangle \pm \Omega_i^{\nu+1}| < \frac{\gamma}{K_{\nu+1}^\tau} \right\},$$

$$\mathcal{R}_{knm}^{\nu+1} = \left\{ \xi \in \mathcal{O}_\nu : |\langle k, \omega_{\nu+1} \rangle \pm \Omega_i^{\nu+1} \pm \Omega_j^{\nu+1}| < \frac{\gamma}{K_{\nu+1}^\tau}, i, j \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2 \right\},$$

$$\mathcal{C}_{knn'}^{\nu+1} = \left\{ \xi \in \mathcal{O}_\nu : |\det(\langle k, \omega_{\nu+1} \rangle I_4 \pm \mathcal{M}_n^{\nu+1} \otimes I_2 \pm I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'}^{\nu+1})| < \frac{\gamma}{K_{\nu+1}^\tau}, k \neq 0, n, n' \in \mathcal{L}_2 \right\},$$

这里 $\omega_{\nu+1} = \omega_\nu + P_{0l00}^\nu$, 有一个辛变换

$$\Phi_\nu : D_{\rho_\nu}(r_{\nu+1}, s_{\nu+1}) \times \mathcal{O}_\nu \rightarrow D_{\rho_\nu}(r_\nu, s_\nu), \quad (3.23)$$

使得在 $D_{\rho_{\nu+1}}(r_{\nu+1}, s_{\nu+1}) \times \mathcal{O}_{\nu+1}$ 上 $H_{\nu+1} = H_\nu \circ \Phi_\nu$ 有如下形式:

$$H_{\nu+1} = e_{\nu+1} + \langle \omega_{\nu+1}, I \rangle + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2} \Omega_n^{\nu+1} z_n \bar{z}_n$$

$$+ \sum_{n \in \mathcal{L}_2} [(\Omega_n^{\nu+1} - (\omega_k - \omega_i)) z_n \bar{z}_n + (\Omega_m^{\nu+1} - (\omega_j + \omega_l)) z_m \bar{z}_m] + \mathcal{B}_{\nu+1} + \bar{\mathcal{B}}_{\nu+1} + P_{\nu+1}.$$

并且在 Whitney 意义下有

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathcal{O}_\nu} \max_{d \leq 8} |\partial_\xi^d (\Omega_n^{\nu+1} - \Omega_n^\nu)| &\leq \varepsilon_\nu, \\ \sup_{\xi \in \mathcal{O}_\nu} \max_{d \leq 8} |\partial_\xi^d (\omega_{\nu+1} - \omega_\nu)| &\leq \varepsilon_\nu, \\ |P_{ij(\nu+1)}^{011} - P_{ij\nu}^{011}|_{\mathcal{O}_\nu} &\leq \varepsilon_\nu e^{-|i-j|\rho}, \end{aligned}$$

而且

$$\|X_{P_{\nu+1}}\|_{D(r_{\nu+1}, s_{\nu+1}), \mathcal{O}_{\nu+1}} \leq \varepsilon_{\nu+1}.$$

3.3.2 收敛性

当 $\nu = 0$ 时, 满足迭代引理 3.11 的假设和定理 2.1 的假设, 需取

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 = \varepsilon, \quad r_0 = r, \quad s_0 = s, \quad L_0 = L, \quad N_0 = N, \quad \mathcal{B}_0 = \mathcal{B}, \quad P_0 = P, \\ \mathcal{O}_0 = \left\{ \xi \in \mathcal{O} : \begin{aligned} &|\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{\gamma}{K_0^\tau}, |k| \neq 0, \\ &|\langle k, \omega \rangle \pm \Omega_n| \geq \frac{\gamma}{K_0^\tau}, n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2, \\ &|\langle k, \omega \rangle \pm \Omega_n \pm \Omega_m| \geq \frac{\gamma}{K_0^\tau}, n, m \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2, \\ &|\det(\langle k, \omega \rangle I_4 \pm \mathcal{M}_n \otimes I_2 \pm I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'})| \geq \frac{\gamma}{K_0^\tau}, k \neq 0, n, n' \in \mathcal{L}_2 \end{aligned} \right\}, \end{aligned}$$

如果 ε_0 和 γ 充分小, 则迭代引理假设也满足. 一直迭代下去, 获得了接下来的序列:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\nu+1} &\subset \mathcal{O}_\nu, \\ \Psi^\nu &= \Phi_0 \circ \Phi_1 \circ \cdots \circ \Phi_\nu : D_{\rho_\nu}(r_{\nu+1}, s_{\nu+1}) \times \mathcal{O}_\nu \rightarrow D_{\rho_0}(r_0, s_0), \quad \nu \geq 0, \\ H \circ \Psi^\nu &= H_{\nu+1} = N_{\nu+1} + \mathcal{B}_{\nu+1} + \bar{\mathcal{B}}_{\nu+1} + P_{\nu+1}. \end{aligned}$$

令 $\tilde{\mathcal{O}} = \bigcap_{\nu=0}^\infty \mathcal{O}_\nu$. 正如文献 [39, 40], 由引理 3.7 知, 在 $D_{\frac{1}{2}r}(\frac{1}{2}r, 0) \times \tilde{\mathcal{O}}$ 上, N_ν 、 Ψ^ν 、 $D\Psi^\nu$ 和 ω_ν 一致收敛, 并且有

$$\begin{aligned} N_\infty + \mathcal{B}_\infty + \bar{\mathcal{B}}_\infty &= e_\infty + \langle \omega_\infty, I \rangle + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2} \Omega_n^\infty z_n \bar{z}_n \\ &+ \sum_{n \in \mathcal{L}_2} [(\Omega_n^\infty - (\omega_k - \omega_i)) z_n \bar{z}_n + (\Omega_m^\infty - (\omega_j + \omega_l)) z_m \bar{z}_m] \\ &+ \mathcal{B}_\infty + \bar{\mathcal{B}}_\infty. \end{aligned}$$

因为

$$\varepsilon_{\nu+1} = c\gamma^{-9} K_\nu^{9(\tau+1)} (r_\nu - r_{\nu-1})^{-c} \varepsilon_\nu^{\frac{4}{3}},$$

如果 ε 充分小, 显然 $\varepsilon_{\nu+1} \rightarrow 0$. 我们也可以得到 $\sum_{\nu=0}^\infty \varepsilon_\nu \leq 2\varepsilon$.

令 ϕ_H^t 是向量场 X_H 对应的流映射. 因为 $H \circ \Psi^\nu = H_{\nu+1}$, 所以有

$$\phi_H^t \circ \Psi^\nu = \Psi^\nu \circ \phi_{H_{\nu+1}}^t. \quad (3.24)$$

Ψ^ν 、 $D\Psi^\nu$ 、 ω_ν 和 X_{H_ν} 的一致收敛性保证了可在 (3.24) 两边同时取极限. 因此, 在 $D_{\frac{1}{2}r}(\frac{1}{2}r, 0) \times \tilde{\mathcal{O}}$ 上, 有

$$\phi_H^t \circ \Psi^\infty = \Psi^\infty \circ \phi_{H_\infty}^t \quad (3.25)$$

和

$$\Psi^\infty : D_{\frac{1}{2}r}\left(\frac{1}{2}r, 0\right) \times \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow D_\rho(r, s) \times \mathcal{O}.$$

从等式 (3.25) 可以得到, 对于 $\xi \in \tilde{\mathcal{O}}$, 有

$$\phi_H^t(\Psi^\infty(\mathbb{T}^b \times \{\xi\})) = \Psi^\infty \phi_{N_\infty}^t(\mathbb{T}^b \times \{\xi\}) = \Psi^\infty(\mathbb{T}^b \times \{\xi\}).$$

这就意味着 $\Psi^\infty(\mathbb{T}^b \times \{\xi\})$ 是一个嵌入环面, 并且对于 $\xi \in \tilde{\mathcal{O}}$ 的原始扰动的 Hamilton 系统也是一个不变环面. 这里强调, 关联于 $\Psi^\infty(\mathbb{T}^b \times \{\xi\})$ 的频率 $\omega_\infty(\xi)$ 只是 $\omega(\xi)$ 发生了微小变化. 不变环面的法向行为也被法向频率 Ω_n^∞ 所控制.

3.4 测度估计

为了记号的方便, 令 $\mathcal{O}_{-1} = \mathcal{O}$, $K_{-1} = 0$. 然后在第 ν 步 KAM 迭代, 我们不得不挖掉下面的共振集:

$$\mathcal{R}^{\nu+1} = \bigcup_{K_\nu < |k| \leq K_{\nu+1}, n, m, n'} (\mathcal{R}_k^{\nu+1} \cup \mathcal{R}_{kn}^{\nu+1} \cup \mathcal{R}_{knm}^{\nu+1} \cup \mathcal{C}_{knn'}^{\nu+1}(\gamma)),$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k^{\nu+1} &= \left\{ \xi \in \mathcal{O}_\nu : |\langle k, \omega_{\nu+1} \rangle| < \frac{\gamma}{K_{\nu+1}^\tau}, |k| \neq 0 \right\}, \\ \mathcal{R}_{kn}^{\nu+1} &= \left\{ \xi \in \mathcal{O}_\nu : |\langle k, \omega_{\nu+1} \rangle \pm \Omega_n^{\nu+1}| < \frac{\gamma}{K_{\nu+1}^\tau}, n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2 \right\}, \\ \mathcal{R}_{knm}^{\nu+1} &= \left\{ \xi \in \mathcal{O}_\nu : |\langle k, \omega_{\nu+1} \rangle \pm \Omega_n^{\nu+1} \pm \Omega_m^{\nu+1}| < \frac{\gamma}{K_{\nu+1}^\tau}, n, m \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2 \right\}, \\ \mathcal{C}_{knn'}^{\nu+1} &= \left\{ \xi \in \mathcal{O}_\nu : |\det(\langle k, \omega_{\nu+1} \rangle I_4 \pm \mathcal{M}_n^{\nu+1} \otimes I_2 \pm I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'}^{\nu+1})| < \frac{\gamma}{K_{\nu+1}^\tau}, k \neq 0, n, n' \in \mathcal{L}_2 \right\}, \end{aligned}$$

这里,

$$\begin{aligned} \omega_{\nu+1}(\xi) &= \omega(\xi) + \sum_{j=0}^{\nu} P_{0l00}^j(\xi), \\ \left| \sum_{j=0}^{\nu} P_{0l00}^j(\xi) \right|_{\mathcal{O}_\nu} &< \varepsilon, \\ |\Omega_n^{\nu+1}(\xi) - \Omega_n(\xi)|_{\mathcal{O}_\nu} &\leq \sum_{j=0}^{\nu} |P_{nn}^{011,j}| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

注 3.1 从第 3.2.2 小节知, 在第 $\nu+1$ 步 KAM 迭代中, 当 $|k| \leq K_\nu$ 时, 小除数条件是自动成立的. 因此只需要挖掉上述的共振集 $\mathcal{R}^{\nu+1}$.

接下来, 只证明最复杂的情形:

$$\left\{ \xi \in \mathcal{O}_\nu : |\det(\langle k, \omega_{\nu+1} \rangle I_4 + \mathcal{M}_n^{\nu+1} \otimes I_2 - I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'}^{\nu+1})| < \frac{\gamma}{K_{\nu+1}^\tau}, k \neq 0, n, n' \in \mathcal{L}_2 \right\}.$$

当 $n \in \mathcal{L}_1$ 和 $n' \in \mathcal{L}_2$ 时, 这里将不会有小除数. 为了简化, 记点集

$$Y^{\nu+1} = \langle k, \omega_{\nu+1} \rangle I_4 + \mathcal{M}_n^{\nu+1} \otimes I_2 - I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'}^{\nu+1}, \quad Y^\nu = \langle k, \omega_\nu \rangle I_4 + \mathcal{M}_n^\nu \otimes I_2 - I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'}^\nu,$$

对于 $|k| \leq K_\nu$, 有

$$\begin{aligned} \|(Y^{\nu+1})^{-1}\| &= \|(Y^\nu + (Y^{\nu+1} - Y^\nu))^{-1}\| \\ &= \|(I + (Y^\nu)^{-1}(Y^{\nu+1} - Y^\nu))^{-1}(Y^\nu)^{-1}\| \\ &\leq 2\|(Y^\nu)^{-1}\| \leq 2\frac{K_\nu^\tau}{\gamma} \leq \frac{K_{\nu+1}^\tau}{\gamma}. \end{aligned}$$

非共振条件自动满足. 当 $K_\nu < |k| \leq K_{\nu+1}$ 时, 考虑 $n, n' \in \mathcal{L}_2$ 作为例子, 其余情形类似. 假设 (n, m) 和 (n', m') 是第二类共振对.

引理 3.12 对于任意给定的 $n, n' \in \mathbb{Z}_1^2$ 并且 $|n - n'| \leq K_{\nu+1}$, 要么有 $|\det(\langle k, \omega_{\nu+1} \rangle I_4 + \mathcal{M}_n^{\nu+1} \otimes I_2 - I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'}^{\nu+1})| > 1$, 要么有 $n_0, n'_0, c \in \mathbb{Z}^2$ 并且有 $|n_0|, |n'_0|, |c| \leq 3K_{\nu+1}^2$ 和 $t \in \mathbb{Z}$, 满足 $n = n_0 + tc$, $n' = n'_0 + tc$.

以上引理的证明参见文献 [38].

引理 3.13 对于 k, n 和 n' , 有

$$\bigcup_{n, n' \in \mathbb{Z}_1^2} \mathcal{C}_{kn n'}^{\nu+1} \subset \bigcup_{n_0, n'_0, c \in \mathbb{Z}^2, t \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_{k, n_0 + tc, n'_0 + tc}^{\nu+1},$$

其中 $|n_0|, |n'_0|, |c| \leq 3K_{\nu+1}^2$.

以上引理的证明参见文献 [38].

引理 3.14 对于固定的 k, n_0, n'_0 和 c , 有

$$\text{meas} \left(\bigcup_{t \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_{k, n_0 + tc, n'_0 + tc}^{\nu+1} \right) < c \frac{\gamma^{\frac{1}{8}}}{K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{9}}}.$$

证明 由上述分析和 $N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P$ 的 Töplitz-Lipschitz 性质, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 矩阵 $Y^{\nu+1}(t)$ 有极限

$$\left\| Y^{\nu+1}(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} Y^{\nu+1}(t) \right\| \leq \frac{\varepsilon_0}{t}.$$

定义共振集

$$\mathcal{C}_{kn_0 n'_0 c \infty}^{\nu+1} = \left\{ \xi \in \mathcal{O}_\nu : \left| \det \lim_{t \rightarrow \infty} Y^{\nu+1}(t) \right| < \frac{\gamma}{K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{9}}} \right\}.$$

对于 $\xi \in \mathcal{O}_\nu \setminus \mathcal{C}_{kn_0 n'_0 c \infty}^{\nu+1}$, 有

$$\left\| \left(\lim_{t \rightarrow \infty} Y^{\nu+1}(t) \right)^{-1} \right\| \leq \frac{K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{9}}}{\gamma}.$$

当 $|t| > K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{9}}$ 时, 由于

$$\left\| Y^{\nu+1}(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} Y^{\nu+1}(t) \right\| \leq \frac{\varepsilon_0}{t},$$

所以有

$$\|(Y^{\nu+1}(t))^{-1}\| \leq 2 \frac{K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{9}}}{\gamma} \leq \frac{K_{\nu+1}^{\tau}}{\gamma}.$$

当 $|t| \leq K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{9}}$ 时, 定义共振集

$$\mathcal{C}_{kn_0n'_0ct}^{\nu+1} = \left\{ \xi \in \mathcal{O}_\nu : |\det Y^{\nu+1}(t)| < \frac{\gamma}{K_{\nu+1}^{\tau}} \right\}.$$

另外,

$$\inf_{\xi \in \mathcal{O}} \max_{0 < d \leq 8} |\partial_\xi^d(\det Y^{\nu+1}(t))| \geq \frac{1}{16} |k| \geq \frac{1}{16} K.$$

对于固定的 k 、 n_0 、 n'_0 、 c 和 t , 以及

$$\text{meas}(\mathcal{C}_{kn_0n'_0ct}^{\nu+1}) < \left(\frac{\gamma}{K_{\nu+1}^{\tau}} \right)^{\frac{1}{8}},$$

有

$$\text{meas} \left\{ \bigcup_{|t| \leq K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{9}}} \mathcal{C}_{kn_0n'_0ct}^{\nu+1} \right\} < K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{9}} \left(\frac{\gamma}{K_{\nu+1}^{\tau}} \right)^{\frac{1}{8}} \leq \frac{\gamma^{\frac{1}{8}}}{K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{72}}}.$$

综上, 可得

$$\text{meas} \left(\bigcup_{t \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_{k, n_0+tc, n'_0+tc}^{\nu+1} \right) < c \frac{\gamma^{\frac{1}{8}}}{K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{72}}}.$$

证毕. □

引理 3.15 挖掉的各个集合的测度如下:

$$\begin{aligned} \text{meas} \left(\bigcup_{K_\nu < |k| \leq K_{\nu+1}} \mathcal{R}_k^{\nu+1} \right) &\leq c K_{\nu+1}^b \frac{\gamma^{\frac{1}{8}}}{K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{72}}} = c \frac{\gamma^{\frac{1}{8}}}{K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{72}-b}}, \\ \text{meas} \left(\bigcup_{K_\nu < |k| \leq K_{\nu+1}, n} \mathcal{R}_{kn}^\nu \right) &\leq c K_{\nu+1}^{2+b} \frac{\gamma^{\frac{1}{8}}}{K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{72}}} = c \frac{\gamma^{\frac{1}{8}}}{K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{72}-2-b}}, \\ \text{meas} \left(\bigcup_{K_\nu < |k| \leq K_{\nu+1}, n, m} \mathcal{R}_{knm}^{\nu+1} \right) &\leq c \frac{\gamma^{\frac{1}{8}}}{K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{72}-12-b}}, \\ \text{meas} \left(\bigcup_{K_\nu < |k| \leq K_{\nu+1}, n, n'} \mathcal{C}_{knn'}^\nu \right) &\leq c \frac{\gamma^{\frac{1}{8}}}{K_{\nu+1}^{\frac{\tau}{72}-12-b}}. \end{aligned}$$

经过无穷步 KAM 迭代, 挖掉参数集的测度由以下的引理 3.16 给出.

引理 3.16 令 $\tau > 72(12 + b + 1)$, 然后经过无穷步 KAM 迭代, 总共需要挖掉的测度总和是

$$\begin{aligned} \text{meas}\left(\bigcup_{\nu \geq 0} \mathcal{R}^{\nu+1}\right) &= \text{meas}\left[\bigcup_{\nu \geq 0} \bigcup_{K_\nu < |k| \leq K_{\nu+1}, n'} (\mathcal{R}_k^{\nu+1} \cup \mathcal{R}_{kn}^{\nu+1} \cup \mathcal{R}_{knn'}^{\nu+1}(\gamma) \cup \mathcal{C}_{knn'}^{\nu+1}(\gamma))\right] \\ &\leq c \sum_{\nu \geq 0} \frac{\gamma^{\frac{1}{8}}}{K_{\nu+1}} \leq c\gamma^{\frac{1}{8}}. \end{aligned}$$

至此, 证明了定理 2.1. 下一小节将验证方程 (1.1) 满足定理 2.1 的假设.

4 无穷维 KAM 定理的应用

考虑在周期边界条件下的二维非线性五次 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}u_t - \Delta u + |u|^4 u = 0, \quad x \in \mathbb{T}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

在周期边界条件下, 算子 $A = -\Delta$ 有特征值 $\{\lambda_n\}$:

$$\lambda_n = |n|^2 = |n_1|^2 + |n_2|^2, \quad n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2,$$

对应的特征函数 $\phi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle n, x \rangle}$, 特征向量组成域上的一组基.

方程 (4.1) 可以写成一个 Hamilton 方程

$$u_t = \mathrm{i} \frac{\partial H}{\partial \bar{u}}, \quad (4.2)$$

对应的 Hamilton 函数是

$$H = \langle Au, u \rangle + \frac{1}{3} \int_{\mathbb{T}^2} |u|^6 dx, \quad (4.3)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 代表 L^2 中的内积. 令

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} q_n \phi_n(x),$$

Hamilton 方程 (4.2) 等价于下面的格点 Hamilton 方程:

$$\dot{q}_n = \mathrm{i} \left(\lambda_n q_n + \frac{\partial G}{\partial \bar{q}_n} \right), \quad G \equiv \frac{1}{48\pi^4} \sum_{i-j+k-l+m-n=0} q_i \bar{q}_j q_k \bar{q}_l q_m \bar{q}_n, \quad (4.4)$$

对应的 Hamilton 函数

$$H = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \lambda_n |q_n|^2 + G. \quad (4.5)$$

正如文献 [8, 25, 39], 在 (4.4) 中的 G 的正则性如下.

定理 4.1 对于任意固定的 $\rho > 0$, 梯度 $G_{\bar{q}}$ 是在原点邻域内实解析的映射且

$$\|G_{\bar{q}}\|_{\rho} \leq c \|q\|_{\rho}^5. \quad (4.6)$$

证明 由导数定义和相关范数的定义可得

$$\begin{aligned}
 \|G_{\bar{q}}\|_{\rho} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} |G_{\bar{q}_n}| e^{|n|\rho} \\
 &\leq c \sum_{n, \alpha, \beta - e_n, |\alpha| + |\beta - e_n| = 5} |q^{\alpha} \bar{q}^{\beta - e_n}| e^{|n|\rho} \\
 &\leq c \sum_{\alpha, \beta - e_n, |\alpha| + |\beta - e_n| = 5} |q^{\alpha} \bar{q}^{\beta - e_n}| e^{|\alpha|\rho} e^{|\beta - e_n|\rho} \\
 &\leq c \|q\|_{\rho}^5.
 \end{aligned}$$

证毕. $\square$

对于切点的一个容许集 $S = \{i_1, \dots, i_b\} \subset \mathbb{Z}^2$, 接下来需要利用标准形技巧得到扭转的近可积系统.

命题 4.1 令 S 是容许集, 对于 Hamilton 函数 (4.5), 存在一个辛变换 Ψ , 满足

$$H \circ \Psi = \langle \omega, I \rangle + \langle \Omega z, z \rangle + \mathcal{A} + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P, \quad (4.7)$$

其中

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} \omega_i(\xi) = \varepsilon^{-6} |i|^2 + \frac{4}{\pi^4} \xi_i^2 - \frac{33}{8\pi^4} \sum_{p \in S} \xi_i \xi_p - \frac{33}{16\pi^4} \sum_{p \in S} \xi_p^2 + \frac{9}{4\pi^4} \sum_{p \in S, q \in S} \xi_p \xi_q, \\ \Omega_n = \varepsilon^{-6} |n|^2 - \frac{9}{16\pi^4} \sum_{p \in S} \xi_p^2 + \frac{3}{4\pi^4} \sum_{p \in S, q \in S} \xi_p \xi_q, \end{cases} \\
 \mathcal{A} &= \frac{3}{4\pi^4} \sum_{n \in \mathcal{L}_1} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} z_n \bar{z}_m e^{i\theta_i - i\theta_j + i\theta_k - i\theta_l}, \\
 \mathcal{B} &= \frac{3}{4\pi^4} \sum_{n \in \mathcal{L}_2} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} z_n z_m e^{i\theta_i - i\theta_j - i\theta_k - i\theta_l}, \\
 \bar{\mathcal{B}} &= \frac{3}{4\pi^4} \sum_{n \in \mathcal{L}_2} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} \bar{z}_n \bar{z}_m e^{-i\theta_i + i\theta_j + i\theta_k + i\theta_l}, \\
 |P| &= O(\varepsilon^2 |I|^2 + \varepsilon^4 |I|^3 + \varepsilon^2 |I| \|z\|_{\rho}^2 + \varepsilon^4 |I|^2 \|z\|_{\rho}^2 + \varepsilon \xi^{\frac{3}{2}} \|z\|_{\rho}^3 + \varepsilon^2 \xi \|z\|_{\rho}^4 + \varepsilon^3 \xi^{\frac{1}{2}} \|z\|_{\rho}^5 \\
 &\quad + \varepsilon^4 \|z\|_{\rho}^6 + \varepsilon \xi^4 + \varepsilon^2 \xi^{\frac{7}{2}} \|z\|_{\rho} + \varepsilon^3 \xi^3 \|z\|_{\rho}^2 + \varepsilon^4 \xi^{\frac{5}{2}} \|z\|_{\rho}^3 + \varepsilon^5 \xi^2 \|z\|_{\rho}^4). \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

证明 证明包含了变量的辛变换. 首先, 令

$$F = \sum_{\substack{i-j+n-m+k-l=0 \\ |i|^2 - |j|^2 + |n|^2 - |m|^2 + |k|^2 - |l|^2 \neq 0 \\ \#S \cap \{i, j, n, m, k, l\} \geq 4}} \frac{i}{48\pi^4 (\lambda_i - \lambda_j + \lambda_n - \lambda_m + \lambda_k - \lambda_l)} q_i \bar{q}_j q_n \bar{q}_m q_k \bar{q}_l, \quad (4.9)$$

它的 Hamilton 向量场 X_F 对应的时间等于 1 的 Hamilton 流映射定义了一个辛映射 Φ_F^1 , 在此辛映射下,

$$\begin{aligned}
 H \circ \Phi_F^1 &= H + \{H, F\} + \int_0^1 (1-t) \{\{H, F\}, F\} \circ \phi_F^t dt \\
 &= \sum_{i \in S} \lambda_i |q_i|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2} \lambda_n |z_n|^2 + \sum_{i \in S} \frac{1}{48\pi^4} |q_i|^6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,p \in S, i \neq p} \frac{3}{16\pi^4} |q_i|^4 |q_p|^2 + \sum_{i \in S, p \in S, q \in S, i \neq p \neq q} \frac{3}{4\pi^4} |q_i|^2 |q_p|^2 |q_q|^2 \\
& + \sum_{i \in S, n \in \mathbb{Z}_1^2} \frac{3}{16\pi^4} |q_i|^4 |z_n|^2 + \sum_{i \in S, p \in S, i \neq p, n \in \mathbb{Z}_1^2} \frac{3}{4\pi^4} |q_i|^2 |q_p|^2 |z_n|^2 \\
& + \sum_{n \in \mathcal{L}_1} \frac{3}{4\pi^4} q_i \bar{q}_j q_k \bar{q}_l z_n \bar{z}_m + \sum_{n \in \mathcal{L}_2} \frac{3}{4\pi^4} (q_i \bar{q}_j \bar{q}_k \bar{q}_l z_n z_m + \bar{q}_i q_j q_k q_l \bar{z}_n \bar{z}_m) \\
& + O(|q|^3 \|z\|_\rho^3 + |q|^2 \|z\|_\rho^4 + |q| \|z\|_\rho^5 + \|z\|_\rho^6 + |q|^8 \\
& + |q|^7 \|z\|_\rho + |q|^6 \|z\|_\rho^2 + |q|^5 \|z\|_\rho^3 + |q|^4 \|z\|_\rho^4). \tag{4.10}
\end{aligned}$$

在 (4.10) 中, (n, m) 是共振对, 并且 (i, j, k, l) 由 (n, m) 唯一确定. 接着, 在切空间引入作用 - 角变量

$$q_i = \sqrt{I_i + \xi_i} e^{i\theta_i}, \quad \bar{q}_i = \sqrt{I_i + \xi_i} e^{-i\theta_i}, \quad i \in S$$

和

$$q_n = z_n, \quad \bar{q}_n = \bar{z}_n, \quad n \in \mathbb{Z}_1^2,$$

我们有

$$\begin{aligned}
H \circ \Phi_F^1 &= \sum_{i \in S} \lambda_i (I_i + \xi_i) + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2} \lambda_n |z_n|^2 + \sum_{i \in S} \frac{1}{48\pi^4} (I_i + \xi_i)^3 \\
&+ \sum_{i,p \in S, i \neq p} \frac{3}{16\pi^4} (I_i + \xi_i)^2 (I_p + \xi_p) + \sum_{i \in S, p \in S, q \in S, i \neq p \neq q} \frac{3}{4\pi^4} (I_i + \xi_i) (I_p + \xi_p) (I_q + \xi_q) \\
&+ \sum_{i \in S, n \in \mathbb{Z}_1^2} \frac{3}{16\pi^4} (I_i + \xi_i)^2 |z_n|^2 + \sum_{i \in S, p \in S, i \neq p, n \in \mathbb{Z}_1^2} \frac{3}{4\pi^4} (I_i + \xi_i) (I_p + \xi_p) |z_n|^2 \\
&+ \sum_{n \in \mathcal{L}_1} \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{(I_i + \xi_i)(I_j + \xi_j)(I_k + \xi_k)(I_l + \xi_l)} z_n \bar{z}_m e^{i(\theta_i - \theta_j + \theta_k - \theta_l)} \\
&+ \sum_{n \in \mathcal{L}_2} \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{(I_i + \xi_i)(I_j + \xi_j)(I_k + \xi_k)(I_l + \xi_l)} z_n z_m e^{i(\theta_i - \theta_j - \theta_k - \theta_l)} \\
&+ \sum_{n \in \mathcal{L}_2} \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{(I_i + \xi_i)(I_j + \xi_j)(I_k + \xi_k)(I_l + \xi_l)} \bar{z}_n \bar{z}_m e^{i(-\theta_i + \theta_j + \theta_k + \theta_l)} \\
&+ O(|q|^3 \|z\|_\rho^3 + |q|^2 \|z\|_\rho^4 + |q| \|z\|_\rho^5 + \|z\|_\rho^6 + |q|^8 + |q|^7 \|z\|_\rho \\
&+ |q|^6 \|z\|_\rho^2 + |q|^5 \|z\|_\rho^3 + |q|^4 \|z\|_\rho^4) \\
&= \sum_{i \in S} \lambda_i I_i + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2} \lambda_n |z_n|^2 + \sum_{i \in S} \frac{1}{16\pi^4} I_i \xi_i^2 \\
&+ \sum_{i,p \in S, i \neq p} \frac{3}{16\pi^4} (2I_i \xi_i \xi_p + \xi_i^2 I_p) + \sum_{i \in S, p \in S, q \in S, i \neq p \neq q} \frac{3}{4\pi^4} (I_i \xi_p \xi_q + I_p \xi_i \xi_q + I_q \xi_i \xi_p) \\
&+ \sum_{i \in S, n \in \mathbb{Z}_1^2} \frac{3}{16\pi^4} \xi_i^2 |z_n|^2 + \sum_{i \in S, p \in S, i \neq p, n \in \mathbb{Z}_1^2} \frac{3}{4\pi^4} \xi_i \xi_p |z_n|^2 \\
&+ \sum_{n \in \mathcal{L}_1} \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} z_n \bar{z}_m e^{i(\theta_i - \theta_j + \theta_k - \theta_l)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n \in \mathcal{L}_2} \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} z_n z_m e^{i(\theta_i - \theta_j - \theta_k - \theta_l)} \\
 & + \sum_{n \in \mathcal{L}_2} \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} \bar{z}_n \bar{z}_m e^{i(-\theta_i + \theta_j + \theta_k + \theta_l)} \\
 & + O(\xi |I|^2 + |I|^3 + \xi |I| \|z\|_\rho^2 + |I|^2 \|z\|_\rho^2 + \xi^{\frac{3}{2}} \|z\|_\rho^3 + \xi \|z\|_\rho^4 + \xi^{\frac{1}{2}} \|z\|_\rho^5 + \|z\|_\rho^6 + \xi^4 \\
 & + \xi^{\frac{7}{2}} \|z\|_\rho + \xi^3 \|z\|_\rho^2 + \xi^{\frac{5}{2}} \|z\|_\rho^3 + \xi^2 \|z\|_\rho^4).
 \end{aligned}$$

尺度变换

$$\xi \rightarrow \varepsilon^3 \xi, \quad I \rightarrow \varepsilon^5 I, \quad \theta \rightarrow \theta, \quad z \rightarrow \varepsilon^{\frac{5}{2}} z, \quad \bar{z} \rightarrow \varepsilon^{\frac{5}{2}} \bar{z}.$$

我们最终得到尺度化的 Hamilton 函数

$$\begin{aligned}
 H &= \varepsilon^{-11} H(\varepsilon^3 \xi, \varepsilon^5 I, \theta, \varepsilon^{\frac{5}{2}} z, \varepsilon^{\frac{5}{2}} \bar{z}) \\
 &= \sum_{i \in S} \varepsilon^{-6} \lambda_i I_i + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2} \varepsilon^{-6} \lambda_n |z_n|^2 + \sum_{i \in S} \frac{1}{16\pi^4} I_i \xi_i^2 \\
 &+ \sum_{i, p \in S, i \neq p} \frac{3}{16\pi^4} (2I_i \xi_i \xi_p + \xi_i^2 I_p) + \sum_{i \in S, p \in S, q \in S, i \neq p \neq q} \frac{3}{4\pi^4} (I_i \xi_p \xi_q + I_p \xi_i \xi_q + I_q \xi_i \xi_p) \\
 &+ \sum_{i \in S, n \in \mathbb{Z}_1^2} \frac{3}{16\pi^4} \xi_i^2 |z_n|^2 + \sum_{i \in S, p \in S, i \neq p, n \in \mathbb{Z}_1^2} \frac{3}{4\pi^4} \xi_i \xi_p |z_n|^2 \\
 &+ \sum_{n \in \mathcal{L}_1} \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} z_n \bar{z}_m e^{i(\theta_i - \theta_j + \theta_k - \theta_l)} \\
 &+ \sum_{n \in \mathcal{L}_2} \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} z_n z_m e^{i(\theta_i - \theta_j - \theta_k - \theta_l)} \\
 &+ \sum_{n \in \mathcal{L}_2} \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} \bar{z}_n \bar{z}_m e^{i(-\theta_i + \theta_j + \theta_k + \theta_l)} \\
 &+ O(\varepsilon^2 |I|^2 + \varepsilon^4 |I|^3 + \varepsilon^2 |I| \|z\|_\rho^2 + \varepsilon^4 |I|^2 \|z\|_\rho^2 + \varepsilon \xi^{\frac{3}{2}} \|z\|_\rho^3 + \varepsilon^2 \xi \|z\|_\rho^4 + \varepsilon^3 \xi^{\frac{1}{2}} \|z\|_\rho^5 \\
 &+ \varepsilon^4 \|z\|_\rho^6 + \varepsilon \xi^4 + \varepsilon^2 \xi^{\frac{7}{2}} \|z\|_\rho + \varepsilon^3 \xi^3 \|z\|_\rho^2 + \varepsilon^4 \xi^{\frac{5}{2}} \|z\|_\rho^3 + \varepsilon^5 \xi^2 \|z\|_\rho^4) \\
 &= N + \mathcal{A} + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P \\
 &= \langle \omega, I \rangle + \langle \Omega z, z \rangle + \mathcal{A} + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P,
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{i \in S} \varepsilon^{-6} \lambda_i I_i + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2} \varepsilon^{-6} \lambda_n |z_n|^2 + \sum_{i \in S} \frac{1}{16\pi^4} I_i \xi_i^2 \\
 &+ \sum_{i, p \in S, i \neq p} \frac{3}{16\pi^4} (2I_i \xi_i \xi_p + \xi_i^2 I_p) + \sum_{i \in S, p \in S, q \in S, i \neq p \neq q} \frac{3}{4\pi^4} (I_i \xi_p \xi_q + I_p \xi_i \xi_q + I_q \xi_i \xi_p) \\
 &+ \sum_{i, n \in \mathbb{Z}_1^2} \frac{3}{16\pi^4} \xi_i^2 |z_n|^2 + \sum_{i \in S, p \in S, i \neq p, n \in \mathbb{Z}_1^2} \frac{3}{4\pi^4} \xi_i \xi_p |z_n|^2, \\
 &\begin{cases} \omega_i(\xi) = \varepsilon^{-6} |i|^2 + \frac{4}{\pi^4} \xi_i^2 - \frac{33}{8\pi^4} \sum_{p \in S} \xi_i \xi_p - \frac{33}{16\pi^4} \sum_{p \in S} \xi_p^2 + \frac{9}{4\pi^4} \sum_{p \in S, q \in S} \xi_p \xi_q, \\ \Omega_n = \varepsilon^{-6} |n|^2 - \frac{9}{16\pi^4} \sum_{p \in S} \xi_p^2 + \frac{3}{4\pi^4} \sum_{p \in S, q \in S} \xi_p \xi_q, \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \sum_{n \in \mathcal{L}_1} \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} z_n \bar{z}_m e^{i(\theta_i - \theta_j + \theta_k - \theta_l)}, \\
\mathcal{B} &= \sum_{n \in \mathcal{L}_2} \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} z_n z_m e^{i(\theta_i - \theta_j - \theta_k - \theta_l)}, \\
\bar{\mathcal{B}} &= \sum_{n \in \mathcal{L}_2} \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} \bar{z}_n \bar{z}_m e^{i(-\theta_i + \theta_j + \theta_k + \theta_l)}, \\
|P| &= O(\varepsilon^2 |I|^2 + \varepsilon^4 |I|^3 + \varepsilon^2 |I| \|z\|_\rho^2 + \varepsilon^4 |I|^2 \|z\|_\rho^2 + \varepsilon \xi^{\frac{3}{2}} \|z\|_\rho^3 + \varepsilon^2 \xi \|z\|_\rho^4 + \varepsilon^3 \xi^{\frac{1}{2}} \|z\|_\rho^5 \\
&\quad + \varepsilon^4 \|z\|_\rho^6 + \varepsilon \xi^4 + \varepsilon^2 \xi^{\frac{7}{2}} \|z\|_\rho + \varepsilon^3 \xi^3 \|z\|_\rho^2 + \varepsilon^4 \xi^{\frac{5}{2}} \|z\|_\rho^3 + \varepsilon^5 \xi^2 \|z\|_\rho^4). \quad (4.11)
\end{aligned}$$

证毕. $\square$

我们将会找一个非线性辛坐标变换, 将命题 4.1 的标准形变成一个更好的形式. 这里需要引用下面的引理 (引理证明参见文献 [24]).

引理 4.1 对于任意的 $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{Z}^b$ 以及满足 $S^T \bar{S} = I$ 的非退化的 $m \times m$ 矩阵 S , 定义下面形式的一个映射 $\Phi_0: (\theta, I, w, \bar{w}) \rightarrow (\theta_+, I_+, z, \bar{z})$:

$$\begin{cases} \theta_+ = \theta, \\ I_+ = I - \sum_{j=1}^m w_j \bar{w}_j k_j, \\ z = S E w, \\ \bar{z} = \bar{S} \bar{E} \bar{w}. \end{cases}$$

映射为辛映射, 其中 E 是一个对角矩阵, 形式如下:

$$E = E(k_1, k_2, \dots, k_m) = \text{diag}(e^{i\langle k_1, \theta \rangle}, e^{i\langle k_2, \theta \rangle}, \dots, e^{i\langle k_m, \theta \rangle}).$$

一个非线性辛坐标变换 Φ :

$$\begin{cases} \theta_+ = \theta, \\ I_+ = I - \sum_{n \in \mathcal{L}_1} [z_n \bar{z}_n (e_i + e_k) + z_m \bar{z}_m (e_j + e_l)] + \sum_{n \in \mathcal{L}_2} [z_n \bar{z}_n (e_k - e_i) + z_m \bar{z}_m (e_j + e_l)], \\ \begin{pmatrix} z_{n+} \\ z_{m+} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} e^{i\langle e_i + e_k, \theta \rangle} & 0 \\ 0 & e^{i\langle e_j + e_l, \theta \rangle} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_n \\ z_m \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \bar{z}_{n+} \\ \bar{z}_{m+} \end{pmatrix} = \bar{S} \begin{pmatrix} e^{-i\langle e_i + e_k, \theta \rangle} & 0 \\ 0 & e^{-i\langle e_j + e_l, \theta \rangle} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z}_n \\ \bar{z}_m \end{pmatrix}, \quad n \in \mathcal{L}_1, \\ \begin{pmatrix} z_{n+} \\ z_{m+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\langle e_k - e_i, \theta \rangle} & 0 \\ 0 & e^{-i\langle e_j + e_l, \theta \rangle} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_n \\ z_m \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \bar{z}_{n+} \\ \bar{z}_{m+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\langle e_k - e_i, \theta \rangle} & 0 \\ 0 & e^{i\langle e_j + e_l, \theta \rangle} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z}_n \\ \bar{z}_m \end{pmatrix}, \quad n \in \mathcal{L}_2, \\ z_{n+} = z_n, \quad \bar{z}_{n+} = \bar{z}_n, \quad n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2). \end{cases}$$

为了记号的简单, 仍用 I 、 θ 、 H 、 z 和 $\bar{z}$ 代替 I_+ 、 θ_+ 、 $H \circ \Psi \circ \Phi$ 、 z_+ 和 $\bar{z}_+$. 我们得到 Hamilton 函数

$$\begin{aligned}
 H &= H \circ \Psi \circ \Phi \\
 &= \langle \omega(\xi), I \rangle + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)} \Omega_n(\xi) z_n \bar{z}_n \\
 &\quad + \sum_{n \in \mathcal{L}_1} \left[\left(\varepsilon^{-6}(|n|^2 + |i|^2 + |k|^2 + \xi^T E \xi) + \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T L \xi)^2 + 144\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} \right) z_n \bar{z}_n \right. \\
 &\quad \left. + \left(\varepsilon^{-6}(|m|^2 + |j|^2 + |l|^2 + \xi^T E \xi) - \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T L \xi)^2 + 144\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} \right) z_m \bar{z}_m \right] \\
 &\quad + \sum_{n \in \mathcal{L}_2} [(\Omega_n - (\omega_k - \omega_i)) z_n \bar{z}_n + (\Omega_m - (\omega_j + \omega_l)) z_m \bar{z}_m] \\
 &\quad + \sum_{n \in \mathcal{L}_2} \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} z_n z_m \\
 &\quad + \sum_{n \in \mathcal{L}_2} \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} \bar{z}_n \bar{z}_m \\
 &\quad + P(\theta, I, z, \bar{z}, \xi) \\
 &= \langle \omega(\xi), I \rangle + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2} \Omega_n(\xi) z_n \bar{z}_n \\
 &\quad + \sum_{n \in \mathcal{L}_2} [(\Omega_n - (\omega_k - \omega_i)) z_n \bar{z}_n + (\Omega_m - (\omega_j + \omega_l)) z_m \bar{z}_m] + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P \\
 &= N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P, \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} \omega_i(\xi) = \varepsilon^{-6}|i|^2 + \frac{4}{\pi^4} \xi_i^2 - \frac{33}{8\pi^4} \sum_{p \in S} \xi_i \xi_p - \frac{33}{16\pi^4} \sum_{p \in S} \xi_p^2 + \frac{9}{4\pi^4} \sum_{p \in S, q \in S} \xi_p \xi_q, \\ \Omega_n = \varepsilon^{-6}|n|^2 - \frac{9}{16\pi^4} \sum_{i \in S} \xi_i^2 + \frac{3}{4\pi^4} \sum_{p \in S, q \in S} \xi_p \xi_q, & n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_1, \\ \Omega_n = \varepsilon^{-6}(|n|^2 + |i|^2 + |k|^2 + \xi^T E \xi) + \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T L \xi)^2 + 144\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l}, & n \in \mathcal{L}_1, \\ \Omega_m = \varepsilon^{-6}(|m|^2 + |j|^2 + |l|^2 + \xi^T E \xi) - \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T L \xi)^2 + 144\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l}, & n \in \mathcal{L}_1, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 N &= \langle \omega(\xi), I \rangle + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2 \setminus \mathcal{L}_2} \Omega_n(\xi) z_n \bar{z}_n \\
 &\quad + \sum_{n \in \mathcal{L}_2} [(\Omega_n - (\omega_k - \omega_i)) z_n \bar{z}_n + (\Omega_m - (\omega_j + \omega_l)) z_m \bar{z}_m], \\
 \mathcal{B} &= \sum_{n \in \mathcal{L}_2} \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} z_n z_m, \\
 \bar{\mathcal{B}} &= \sum_{n \in \mathcal{L}_2} \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} \bar{z}_n \bar{z}_m,
 \end{aligned}$$

这里 P 仅仅是将 G 里的关于 $(q_{i_1}, \dots, q_{i_b}, \bar{q}_{i_1}, \dots, \bar{q}_{i_b}, q_n, \bar{q}_n)$ 变量的项用 $(\theta, I, z_n, \bar{z}_n)$ 变量表示出来. 最后来验证 $H = N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P$ 满足假设 (A1)–(A6).

验证 (A1): 我们有

$$\det(\partial_{\xi}^2 \omega_1) = \det \left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \right) = \left(-\frac{1}{8\pi^4} \right)^b (63b - 129) \cdot 33^{b-2} \neq 0.$$

这就意味着对于矩阵 $(\partial_{\xi}^2 \omega)$ 的一个子矩阵, $\text{rank}(\partial_{\xi}^2 \omega_1) = b$, 满足 (2.6), 因此 (A1) 得证.

验证 (A2): 取 $a = 6$, 证明是显然的.

验证 (A3): 这一部分证明类似于文献 [35], 为了完整, 下面再写一遍. 接下来仅给最复杂情形的证明. 令

$$\mathcal{M}_n = \begin{pmatrix} \Omega_n + \omega_i - \omega_k & -\frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} \\ \frac{3}{4\pi^4} \sqrt{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} & -(\Omega_m - \omega_j - \omega_l) \end{pmatrix}, \quad n \in \mathcal{L}_2,$$

其中 (i, j, k, l) 由 n 和 m 唯一确定. 我们仅对于最复杂情形 $\det(\langle k, \omega \rangle I_4 \pm \mathcal{M}_n \otimes I_2 \pm I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'})$ 验证 (A3). 令 A 和 B 是 2×2 矩阵, 我们知 $\lambda I_4 + A \otimes I_2 - I_2 \otimes B_2 = (\lambda I_2 + A) \otimes I_2 - I_2 \otimes B$. 更多地, 有下面的引理.

引理 4.2 A 与 B 为二阶矩阵, I_2 为二阶单位阵,

$$|A \otimes I_2 \pm I_2 \otimes B| = (|A| - |B|)^2 + |A|(\text{tr}(B))^2 + |B|(\text{tr}(A))^2 \pm (|A| + |B|)\text{tr}(A)\text{tr}(B),$$

其中 $|\cdot|$ 代表矩阵的行列式.

情形 1 $n, n' \in \mathcal{L}_1$:

$$\langle k, \omega \rangle \pm \Omega_n \pm \Omega_{n'},$$

点集 $\alpha = \varepsilon^{-6}(|i_1|^2, |i_2|^2, \dots, |i_b|^2)$, $\xi = (\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_b})$,

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{\pi^4} \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \cdots & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{9}{4} & \cdots & \frac{9}{4} \\ \frac{3}{16} & \frac{9}{4} & \frac{3}{16} & \cdots & \frac{9}{4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{3}{16} & \frac{4}{9} & \frac{9}{4} & \cdots & \frac{3}{16} \end{pmatrix}_{b \times b}, \\ E &= \frac{1}{\pi^4} \begin{pmatrix} \frac{9}{16} & \frac{21}{4} & \cdots & \frac{21}{4} \\ \frac{21}{4} & \frac{9}{16} & \cdots & \frac{21}{4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{21}{4} & \frac{21}{4} & \cdots & \frac{9}{16} \end{pmatrix}_{b \times b} + \frac{2}{\pi^4} (e_{ii} + e_{jj} + e_{kk} + e_{ll}) \\ &\quad - \frac{33}{32\pi^4} \left[\sum_{s=1}^b (e_{is} + e_{si}) + \sum_{s=1}^b (e_{js} + e_{sj}) + \sum_{s=1}^b (e_{ks} + e_{sk}) + \sum_{s=1}^b (e_{ls} + e_{sl}) \right], \\ E' &= \frac{1}{\pi^4} \begin{pmatrix} \frac{9}{16} & \frac{21}{4} & \cdots & \frac{21}{4} \\ \frac{21}{4} & \frac{9}{16} & \cdots & \frac{21}{4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{21}{4} & \frac{21}{4} & \cdots & \frac{9}{16} \end{pmatrix}_{b \times b} + \frac{2}{\pi^4} (e_{i'i'} + e_{j'j'} + e_{k'k'} + e_{l'l'}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{33}{32\pi^4} \left[\sum_{s=1}^b (e_{i's} + e_{si'}) + \sum_{s=1}^b (e_{j's} + e_{sj'}) + \sum_{s=1}^b (e_{k's} + e_{sk'}) + \sum_{s=1}^b (e_{l's} + e_{sl'}) \right], \\
 G = & \frac{1}{\pi^4} \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{9}{4} & \cdots & \frac{9}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{3}{16} & \cdots & \frac{9}{4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{9}{4} & \frac{9}{4} & \cdots & \frac{3}{16} \end{pmatrix}_{b \times b} + \frac{2}{\pi^4} (e_{ii} + e_{jj} - e_{kk} + e_{ll}) \\
 & -\frac{33}{32\pi^4} \left[\sum_{s=1}^b (e_{is} + e_{si}) + \sum_{s=1}^b (e_{js} + e_{sj}) - \sum_{s=1}^b (e_{ks} + e_{sk}) + \sum_{s=1}^b (e_{ls} + e_{sl}) \right], \\
 G' = & \frac{1}{\pi^4} \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{9}{4} & \cdots & \frac{9}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{3}{16} & \cdots & \frac{9}{4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{9}{4} & \frac{9}{4} & \cdots & \frac{3}{16} \end{pmatrix}_{b \times b} + \frac{2}{\pi^4} (e_{i'i'} + e_{j'j'} - e_{k'k'} + e_{l'l'}) \\
 & -\frac{33}{32\pi^4} \left[\sum_{s=1}^b (e_{i's} + e_{si'}) + \sum_{s=1}^b (e_{j's} + e_{sj'}) - \sum_{s=1}^b (e_{k's} + e_{sk'}) + \sum_{s=1}^b (e_{l's} + e_{sl'}) \right], \\
 L = & 32(e_{ii} + e_{kk} - e_{jj} - e_{ll}) \\
 & -\frac{33}{2} \left[\sum_{s=1}^b (e_{is} + e_{si}) + \sum_{s=1}^b (e_{ks} + e_{sk}) - \sum_{s=1}^b (e_{js} + e_{sj}) - \sum_{s=1}^b (e_{ls} + e_{sl}) \right], \\
 L' = & 32(e_{i'i'} + e_{k'k'} - e_{j'j'} - e_{l'l'}) \\
 & -\frac{33}{2} \left[\sum_{s=1}^b (e_{i's} + e_{si'}) + \sum_{s=1}^b (e_{k's} + e_{sk'}) - \sum_{s=1}^b (e_{j's} + e_{sj'}) - \sum_{s=1}^b (e_{l's} + e_{sl'}) \right], \\
 M = & \begin{pmatrix} 0 & -24 & \cdots & -24 \\ -24 & 0 & \cdots & -24 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -24 & -24 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{b \times b} + 32(e_{ii} - e_{jj} - e_{kk} - e_{ll}) \\
 & -\frac{33}{2} \left[\sum_{s=1}^b (e_{is} + e_{si}) - \sum_{s=1}^b (e_{js} + e_{sj}) - \sum_{s=1}^b (e_{ks} + e_{sk}) - \sum_{s=1}^b (e_{ls} + e_{sl}) \right], \\
 M' = & \begin{pmatrix} 0 & -24 & \cdots & -24 \\ -24 & 0 & \cdots & -24 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -24 & -24 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{b \times b} + 32(e_{i'i'} - e_{j'j'} - e_{k'k'} - e_{l'l'}) \\
 & -\frac{33}{2} \left[\sum_{s=1}^b (e_{i's} + e_{si'}) - \sum_{s=1}^b (e_{j's} + e_{sj'}) - \sum_{s=1}^b (e_{k's} + e_{sk'}) - \sum_{s=1}^b (e_{l's} + e_{sl'}) \right].
 \end{aligned}$$

注意到 $|n|^2 + |i|^2 + |k|^2 = |m|^2 + |j|^2 + |l|^2$, $|n'|^2 + |i'|^2 + |k'|^2 = |m'|^2 + |j'|^2 + |l'|^2$. 特征值为

$$\begin{aligned} \langle k, \alpha \rangle \pm \varepsilon^{-6}(|n|^2 + |i|^2 + |k|^2) \pm \varepsilon^{-6}(|n'|^2 + |i'|^2 + |k'|^2) + \xi^T \left[\left(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i) \right) \pm E \pm E' \right] \xi \\ \pm \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T L \xi)^2 + 144 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} \pm \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T L' \xi)^2 + 144 \xi_{i'} \xi_{k'} \xi_{j'} \xi_{l'}}, \end{aligned}$$

其中 $P(1, i)$ 代表将 $b \times b$ 的单位矩阵第一行和第 i 行互换; e_{ij} 代表 $b \times b$ 的矩阵, 这里只有第 i 行、第 j 列位置元素为 1, 其余位置元素为 0. 如果 $i \neq i'$, 由于平方根项的存在, 所有特征值不恒为 0; 如果 $i = i'$, 同时有 $j = j'$, $k = k'$, $l = l'$, (以最复杂的情形为例) 特征值选为

$$\begin{aligned} \langle k, \alpha \rangle + \varepsilon^{-6}(|n|^2 + |i|^2 + |k|^2) - \varepsilon^{-6}(|n'|^2 + |i'|^2 + |k'|^2) + \xi^T \left[\left(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i) \right) + E - E' \right] \xi \\ + \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T L \xi)^2 + 144 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} - \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T L' \xi)^2 + 144 \xi_{i'} \xi_{k'} \xi_{j'} \xi_{l'}} \\ = \langle k, \alpha \rangle + \varepsilon^{-6}(|n|^2 - |n'|^2) + \xi^T \left(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i) \right) \xi. \end{aligned}$$

然后当 $k \neq 0$ 时, $(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i)) \neq 0$, 所有特征值不恒为 0; 如果特征值是

$$\begin{aligned} \langle k, \alpha \rangle + \varepsilon^{-6}(|n|^2 + |i|^2 + |k|^2) + \varepsilon^{-6}(|n'|^2 + |i'|^2 + |k'|^2) + \xi^T \left[\left(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i) \right) + E + E' \right] \xi \\ + \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T L \xi)^2 + 144 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} - \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T L' \xi)^2 + 144 \xi_{i'} \xi_{k'} \xi_{j'} \xi_{l'}} \\ = \langle k, \alpha \rangle + \varepsilon^{-6}(|n|^2 + |i|^2 + |k|^2) + \varepsilon^{-6}(|n'|^2 + |i'|^2 + |k'|^2) \\ + \xi^T \left[\left(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i) \right) + 2E \right] \xi, \end{aligned}$$

当 $(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i)) + 2E = 0$ 时, k 的所有元素都相同并且 $(\frac{3(b-1)}{16} + \frac{1}{16})(k)_1 + 1 = 0$ ($b > 6$, $k \in \mathbb{Z}^b$), 其没有整数解, 所有特征值不恒为 0.

情形 2 $n \in \mathcal{L}_1, n' \in \mathcal{L}_2$. 这种情形, $(\langle k, \omega \rangle \pm \Omega_n) I_2 \pm \mathcal{M}_{n'}$ 的特征值是

$$\begin{aligned} \langle k, \alpha \rangle \pm \varepsilon^{-6}(|n|^2 + |i|^2 + |k|^2) \pm \varepsilon^{-6}(|n'|^2 + |i'|^2 - |k'|^2) + \xi^T \left[\left(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i) \right) \pm E \pm G' \right] \xi \\ \pm \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T L \xi)^2 + 144 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} \pm \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T M' \xi)^2 - 144 \xi_{i'} \xi_{j'} \xi_{k'} \xi_{l'}}. \end{aligned}$$

由于非零虚部的存在, 所有特征值不恒为 0.

情形 3 $n, n' \in \mathcal{L}_2$. 在这种情形下, $\langle k, \omega \rangle I_4 \pm \mathcal{M}_n \otimes I_2 \pm I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'}$ 的特征值是

$$\begin{aligned} \langle k, \alpha \rangle \pm \varepsilon^{-6}(|n|^2 + |i|^2 - |k|^2) \pm \varepsilon^{-6}(|n'|^2 + |i'|^2 - |k'|^2) + \xi^T \left[\left(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i) \right) \pm G \pm G' \right] \xi \\ \pm \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T M \xi)^2 - 144 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} \pm \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T M' \xi)^2 - 144 \xi_{i'} \xi_{k'} \xi_{j'} \xi_{l'}}. \end{aligned}$$

如果 $i \neq i'$, 由于平方根项的存在, 所有特征值不恒为 0. 如果 $i = i', j = j', k = k', l = l'$, (以最复杂的情形为例) 特征值选为

$$\begin{aligned} & \langle k, \alpha \rangle + \varepsilon^{-6}(|n|^2 + |i|^2 - |k|^2) - \varepsilon^{-6}(|n'|^2 + |i'|^2 - |k'|^2) + \xi^T \left[\left(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i) \right) + G - G' \right] \xi \\ & + \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T M \xi)^2 - 144 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} - \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T M' \xi)^2 - 144 \xi_{i'} \xi_{j'} \xi_{k'} \xi_{l'}} \\ & = \langle k, \alpha \rangle + \varepsilon^{-6}(|n|^2 + |i|^2 - |k|^2) - \varepsilon^{-6}(|n'|^2 + |i'|^2 - |k'|^2) + \xi^T \left[\left(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i) \right) \right] \xi. \end{aligned}$$

当 $k \neq 0$ 时, $(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i)) \neq 0$, 所有特征值不恒为 0, 特征值选为

$$\begin{aligned} & \langle k, \alpha \rangle + \varepsilon^{-6}(|n|^2 + |i|^2 - |k|^2) + \varepsilon^{-6}(|n'|^2 + |i'|^2 - |k'|^2) + \xi^T \left[\left(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i) \right) + G + G' \right] \xi \\ & + \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T M \xi)^2 - 144 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} - \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T M' \xi)^2 - 144 \xi_{i'} \xi_{j'} \xi_{k'} \xi_{l'}} \\ & = \langle k, \alpha \rangle + \varepsilon^{-6}(|n|^2 + |i|^2 - |k|^2) - \varepsilon^{-6}(|n'|^2 + |i'|^2 - |k'|^2) \\ & + \xi^T \left[\left(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i) \right) + 2G \right] \xi. \end{aligned}$$

当 $(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i)) + 2G = 0$ 时, 我们得到 k 的元素 $(k)_s$ ($s \neq k$) 相等且满足

$$\begin{cases} (3b-1)(k)_s + 3(k)_k + 4 = 0, \\ (3b-3)(k)_s + (k)_k + 8 = 0. \end{cases}$$

其不存在整数解, 因此所有特征值不恒为 0.

如果 $i = i', j = k', k = j', l = l'$, (以最复杂的情形为例) 特征值选为

$$\begin{aligned} & \langle k, \alpha \rangle + \varepsilon^{-6}(|n|^2 + |i|^2 - |k|^2) - \varepsilon^{-6}(|n'|^2 + |i'|^2 - |k'|^2) + \xi^T \left[\left(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i) \right) + G - G' \right] \xi \\ & + \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T M \xi)^2 - 144 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} - \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T M' \xi)^2 - 144 \xi_{i'} \xi_{j'} \xi_{k'} \xi_{l'}} \\ & = \langle k, \alpha \rangle + \varepsilon^{-6}(|n|^2 + |i|^2 - |k|^2) - \varepsilon^{-6}(|n'|^2 + |i'|^2 - |k'|^2) \\ & + \xi^T \left[\left(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i) \right) + G - G' \right] \xi. \end{aligned}$$

当 $k \neq 0$ 时, $(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i)) + G - G' \neq 0$, 所有特征值不恒为 0, (以最复杂的情形为例) 特征值选为

$$\begin{aligned} & \langle k, \alpha \rangle + \varepsilon^{-6}(|n|^2 + |i|^2 - |k|^2) + \varepsilon^{-6}(|n'|^2 + |i'|^2 - |k'|^2) + \xi^T \left[\left(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i DP(1, i) \right) + G + G' \right] \xi \\ & + \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T M \xi)^2 - 144 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l} - \frac{1}{16\pi^4} \sqrt{(\xi^T M' \xi)^2 - 144 \xi_{i'} \xi_{j'} \xi_{k'} \xi_{l'}} \\ & = \langle k, \alpha \rangle + \varepsilon^{-6}(|n|^2 + |i|^2 - |k|^2) - \varepsilon^{-6}(|n'|^2 + |i'|^2 - |k'|^2) \end{aligned}$$

$$+ \xi^T \left[\left(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i D P(1, i) \right) + G + G' \right] \xi.$$

当 $(\sum_{i=1}^b P(1, i)^T k_i D P(1, i)) + G + G' = 0$ 时, 我们得到 k 的元素 $(k)_s$ ($s \neq i, l$) 都相等且 $(k)_i = (k)_l$ 满足

$$\begin{cases} (3b-8)(k)_s + 6(k)_i = 0, \\ 3(b-2)(k)_s + 3(k)_i + 38 = 0, \end{cases}$$

方程组没有整数解. 当 $i = i', j = j', k = l', l = k'$, 证明类似. 因此所有特征值不恒为 0. 其他情形证明类似, 我们省略. 由引理 4.2 可知, $\det(\langle k, \omega \rangle I_4 \pm \mathcal{M}_n \otimes I_2 \pm I_2 \otimes \mathcal{M}_{n'})$ 是一个关于 ξ 至多 8 阶的一个多项式函数. 因此,

$$|\partial_\xi^8 (\det(\langle k, \omega \rangle I_4 \pm A_n \otimes I_2 \pm I_2 \otimes A_{n'}))| \geq \frac{1}{16} |k| \neq 0.$$

通过挖掉测度为 $\mathcal{O}(\gamma^{\frac{1}{8}})$ 的参数集, 有

$$|\det(\langle k, \omega \rangle I_4 \pm A_n \otimes I_2 \pm I_2 \otimes A_{n'})| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \quad k \neq 0, \quad n, n' \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2.$$

因此 (A3) 满足.

验证 (A4): 对于一个给定的 $0 < r < 1$ 和 $s = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, 根据引理 4.1, $\|G_{\bar{q}}\|_\rho \leq c\|q\|_\rho^5$, 我们有

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2} \|P_{z_n}\|_{\mathcal{O}} e^{|n|\rho} + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2} \|P_{\bar{z}_n}\|_{\mathcal{O}} e^{|n|\rho} = \|P_z\|_\rho + \|P_{\bar{z}}\|_\rho \leq c\|q\|_\rho^5 \leq c(|I|^{\frac{5}{2}} + \|z\|_\rho^5).$$

另外,

$$\sup_{\|q\|_\rho < 2s} \|G\|_{\mathcal{O}} \leq c \sup_{\|q\|_\rho < 2s} \|q\|_\rho^6 \leq cs^6,$$

因此,

$$\|P\|_{D_\rho(2r, 2s), \mathcal{O}} = \sup_{D_\rho(2r, 2s)} \|P\|_{\mathcal{O}} \leq cs^6.$$

根据 Cauchy 估计, 可得

$$\|P_I\|_{D_\rho(r, s), \mathcal{O}} \leq cs^4, \quad \|P_\theta\|_{D_\rho(r, s), \mathcal{O}} \leq cs^6.$$

因此,

$$\begin{aligned} \|X_P\|_{D_\rho(r, s), \mathcal{O}} &= \|P_I\|_{D_\rho(r, s), \mathcal{O}} + \frac{1}{s^2} \|P_\theta\|_{D_\rho(r, s), \mathcal{O}} \\ &\quad + \sup_{D_\rho(r, s)} \left[\frac{1}{s} \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2} \|P_{z_n}\|_{\mathcal{O}} e^{|n|\rho} + \frac{1}{s} \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^2} \|P_{\bar{z}_n}\|_{\mathcal{O}} e^{|n|\rho} \right] \\ &\leq cs^4 + \frac{cs^6}{s^2} + c \sup_{D_\rho(r, s)} \frac{1}{s} (|I|^{\frac{5}{2}} + \|z\|_\rho^5) \\ &\leq cs^4 \leq c\varepsilon. \end{aligned}$$

所以 (A4) 满足.

验证 (A5):

$$\begin{aligned} \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P &= \frac{1}{48\pi^4} \sum_{\sum_{j=1}^b (\alpha_{i_j} - \beta_{i_j}) i_j + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^d} (\alpha_n - \beta_n) n = 0} \sqrt{I_1 + \xi_1}^{\alpha_{i_1} + \beta_{i_1}} \cdots \sqrt{I_b + \xi_b}^{\alpha_{i_b} + \beta_{i_b}} \\ &\times e^{i \sum_{j=1}^b (\alpha_{i_j} - \beta_{i_j}) \theta_j} \times e^{i \sum_{n \in \mathcal{L}_1} [(\alpha_n - \beta_n)(\theta_i + \theta_k) + (\alpha_m - \beta_m)(\theta_j + \theta_l)]} \\ &\times e^{-i \sum_{n \in \mathcal{L}_2} [(\alpha_n - \beta_n)(\theta_k - \theta_i) + (\alpha_m - \beta_m)(\theta_j + \theta_l)]} \times z^{\alpha - \sum_{j=1}^b \alpha_{i_j} e_{i_j}} \bar{z}^{\beta - \sum_{j=1}^b \beta_{i_j} e_{i_j}}. \end{aligned}$$

令 $k_1 = (k_{1_1}, \dots, k_{1_b}) = (\alpha_{i_1} - \beta_{i_1}, \dots, \alpha_{i_b} - \beta_{i_b})$,

$$e^{i \sum_{n \in \mathcal{L}_1} [(\alpha_n - \beta_n)(\theta_i + \theta_k) + (\alpha_m - \beta_m)(\theta_j + \theta_l)]} \times e^{-i \sum_{n \in \mathcal{L}_2} [(\alpha_n - \beta_n)(\theta_k - \theta_i) + (\alpha_m - \beta_m)(\theta_j + \theta_l)]} = e^{i \langle k_2, \theta \rangle},$$

有

$$\mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P = \sum_{k \in \mathbb{Z}^b, l \in \mathbb{N}^b, \alpha, \beta} (\mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P)_{kl\alpha\beta}(\xi) I^l e^{i \langle k, \theta \rangle} z^\alpha \bar{z}^\beta,$$

其中 $k = (k_1, k_2, \dots, k_b) = (k_{1_1} + k_{2_1}, k_{1_2} + k_{2_2}, \dots, k_{1_b} + k_{2_b}) \in \mathbb{Z}^b$, $l \in \mathbb{N}^b$, α 和 β 有如下等式关系:

$$\sum_{j=1}^b k_j i_j + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^d} (\alpha_n - \beta_n) n = 0$$

和

$$\sum_{j=1}^b k_j + \sum_{n \in \mathbb{Z}_1^d} (\alpha_n - \beta_n) = 0.$$

因此 (A5) 满足.

验证 (A6): 我们仅需要验证 P 满足 (A6). 回顾 (4.9), F 由如下形式给出:

$$F = \sum_{\substack{i-j+n-m+k-l=0 \\ |i|^2 - |j|^2 + |n|^2 - |m|^2 + |k|^2 - |l|^2 \neq 0 \\ \sharp S \cap \{i, j, n, m, k, l\} \geq 4}} \frac{i}{48\pi^4 (\lambda_i - \lambda_j + \lambda_n - \lambda_m + \lambda_k - \lambda_l)} q_i \bar{q}_j q_n \bar{q}_m q_k \bar{q}_l.$$

对于充分大的 t 和任意的 $c \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, 有

$$\begin{aligned} &\sum_{i, j, n, m, k, l, t} \frac{i}{48\pi^4 (\lambda_i - \lambda_j + \lambda_{n+tc} - \lambda_{m+tc} + \lambda_k - \lambda_l)} q_i \bar{q}_j q_{n+tc} \bar{q}_{m+tc} q_k \bar{q}_l \\ &= \sum_{i, j, n, m, k, l, t} \frac{i}{48\pi^4 (|i|^2 - |j|^2 + |n|^2 - |m|^2 + |k|^2 - |l|^2 + 2t \langle n - m, c \rangle)} q_i \bar{q}_j z_{n+tc} \bar{z}_{m+tc} q_k \bar{q}_l. \end{aligned}$$

因此, 当 $\langle n - m, c \rangle = 0$ 时,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_{n+tc} \partial \bar{z}_{m+tc}} = \frac{\partial^2 F}{\partial z_n \partial \bar{z}_m};$$

当 $\langle n - m, c \rangle \neq 0$ 时,

$$\left\| \frac{\partial^2 F}{\partial z_{n+tc} \partial \bar{z}_{m+tc}} - 0 \right\| \leq \frac{\varepsilon}{|t|} e^{-|n-m|\rho}.$$

类似地,

$$\left\| \frac{\partial^2 F}{\partial z_{n+tc} \partial z_{m-tc}} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 F}{\partial z_{n+tc} \partial z_{m-tc}} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{|t|} e^{-|n+m|\rho},$$

$$\left\| \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z}_{n+tc} \partial \bar{z}_{m-tc}} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z}_{n+tc} \partial \bar{z}_{m-tc}} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{|t|} e^{-|n+m|\rho}.$$

也就是说, F 满足 Töplitz-Lipschitz 性质. 回顾整理 Hamilton 函数 (4.1) 的过程, 我们只需要证明 $\{G, F\}$ 也满足 Töplitz-Lipschitz 性质. 引理 3.10 说明了 Poisson 括号运算保持 Töplitz-Lipschitz 性质. 因此, $N + \mathcal{B} + \bar{\mathcal{B}} + P$ 满足 (A6). 因此 (A6) 满足.

因此, 对于 Hamilton 函数 (4.12), 我们验证了定理 2.1 的所有假设. 通过应用定理 2.1, 我们得到了定理 1.1.

致谢 感谢审稿人的仔细审阅以及提出的一些具体的修改意见.

参考文献

- 1 Bambusi D. On long time stability in Hamiltonian perturbations of non-resonant linear PDEs. *Nonlinearity*, 1999, 12: 823–850
- 2 Chierchia L, You J G. KAM tori for 1D nonlinear wave equations with periodic boundary conditions. *Comm Math Phys*, 2000, 211: 497–525
- 3 Eliasson L H. Perturbations of stable invariant tori for Hamiltonian systems. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci* (5), 1988, 15: 115–147
- 4 Eliasson L H, Kuksin S B. KAM for the nonlinear Schrödinger equation. *Ann of Math* (2), 2010, 172: 371–435
- 5 Kappeler T, Pöschel J. *KdV & KAM*. Berlin-Heidelberg: Springer, 2003
- 6 Kuksin S B. Hamiltonian perturbations of infinite-dimensional linear systems with an imaginary spectrum. *Funct Anal Appl*, 1987, 21: 192–205
- 7 Kuksin S B. *Nearly Integrable Infinite-Dimensional Hamiltonian Systems*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1556. Berlin: Springer, 1993
- 8 Kuksin S B, Pöschel J. Invariant Cantor manifolds of quasi-periodic oscillations for a nonlinear Schrödinger equation. *Ann of Math* (2), 1996, 143: 149–179
- 9 Bourgain J. Quasi-periodic solutions of Hamiltonian perturbations of 2D linear Schrödinger equations. *Ann of Math* (2), 1998, 148: 363–439
- 10 Bourgain J. Construction of periodic solutions of nonlinear wave equations in higher dimension. *Geom Funct Anal*, 1995, 5: 629–639
- 11 Bourgain J. Construction of quasi-periodic solutions for Hamiltonian perturbations of linear equations and applications to nonlinear PDE. *Int Math Res Not IMRN*, 1994, 11: 475–497
- 12 Bourgain J. *Green's Function Estimates for Lattice Schrödinger Operators and Applications*. Annals of Mathematics Studies, vol. 158. Princeton: Princeton University Press, 2005
- 13 Bourgain J. *Global Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations*. Providence: Amer Math Soc, 1999
- 14 Bourgain J. On diffusion in high-dimensional Hamiltonian systems and PDE. *J Anal Math*, 2000, 80: 1–35
- 15 Bourgain J, Wang W M. Quasi-periodic solutions of nonlinear random Schrödinger equations. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2008, 10: 1–45
- 16 Craig W, Wayne C E. Newton's method and periodic solutions of nonlinear wave equations. *Comm Pure Appl Math*, 1993, 46: 1409–1498
- 17 Procesi M, Procesi C. A normal form for the Schrödinger equation with analytic non-linearities. *Comm Math Phys*, 2015, 312: 501–557
- 18 Procesi C, Procesi M. A KAM algorithm for the resonant non-linear Schrödinger equation. *Adv Math*, 2015, 272: 399–470
- 19 Wayne C E. Periodic and quasi-periodic solutions of nonlinear wave equations via KAM theory. *Comm Math Phys*, 1990, 127: 479–528
- 20 Xu J X, Qiu Q J, You J G. A KAM theorem of degenerate infinite dimensional Hamiltonian systems (I). *Sci China Ser A*, 1996, 39: 372–383

- 21 Xu J X, Qiu Q J, You J G. A KAM theorem of degenerate infinite dimensional Hamiltonian systems (II). *Sci China Ser A*, 1996, 39: 384–394
- 22 Xue S S, Geng J S. A KAM theorem for higher dimensional forced nonlinear Schrödinger equations. *J Dynam Differential Equations*, 2018, 30: 979–1010
- 23 Yuan X P. Quasi-periodic solutions of completely resonant nonlinear wave equations. *J Differential Equations*, 2006, 230: 213–274
- 24 Xu J, You J G. Persistence of lower-dimensional tori under the first Melnikov's non-resonance condition. *J Math Pures Appl* (9), 2001, 80: 1045–1067
- 25 Geng J S, You J G. A KAM theorem for one dimensional Schrödinger equation with periodic boundary conditions. *J Differential Equations*, 2005, 209: 1–56
- 26 You J G. Perturbations of lower dimensional tori for Hamiltonian systems. *J Differential Equations*, 1999, 152: 1–29
- 27 Berti M, Bolle P. Sobolev quasi-periodic solutions of multidimensional wave equations with a multiplicative potential. *Nonlinearity*, 2012, 25: 2579–2613
- 28 Berti M, Bolle P. Quasi-periodic solutions with Sobolev regularity of NLS on $\mathbb{T}^d$ with a multiplicative potential. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2013, 15: 229–286
- 29 Wang W M. Energy supercritical nonlinear Schrödinger equations: Quasiperiodic solutions. *Duke Math J*, 2016, 165: 1129–1192
- 30 Geng J S, You J G. A KAM theorem for Hamiltonian partial differential equations in higher dimensional spaces. *Comm Math Phys*, 2006, 262: 343–372
- 31 Geng J S, You J G. KAM tori for higher dimensional beam equations with constant potentials. *Nonlinearity*, 2006, 19: 2405–2423
- 32 Geng J S, Yi Y F. Quasi-periodic solutions in a nonlinear Schrödinger equation. *J Differential Equations*, 2007, 233: 512–542
- 33 Pöschel J. On the construction of almost periodic solutions for a nonlinear Schrödinger equation. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2002, 22: 1537–1549
- 34 Geng J S, You J G. A KAM theorem for higher dimensional nonlinear Schrödinger equations. *J Dynam Differential Equations*, 2013, 25: 451–476
- 35 Geng J S, Xu X D, You J G. An infinite dimensional KAM theorem and its application to the two dimensional cubic Schrödinger equation. *Adv Math*, 2011, 226: 5361–5402
- 36 Eliasson L H, Grébert B, Kuksin S B. KAM for the nonlinear beam equation. *Geom Funct Anal*, 2016, 26: 1588–1715
- 37 You J G, Geng J S, Xu J X. KAM theory in finite and infinite dimensional spaces (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2017, 47: 77–96 [尤建功, 耿建生, 徐君祥. 有限维和无穷维空间上的 KAM 理论. *中国科学: 数学*, 2017, 47: 77–96]
- 38 Geng J S, Xue S S. Invariant tori for two-dimensional nonlinear Schrödinger equations with large forcing terms. *J Math Phys*, 2019, 60: 052703
- 39 Pöschel J. Quasi-periodic solutions for a nonlinear wave equation. *Comment Math Helv*, 1996, 71: 269–296
- 40 Pöschel J. A KAM theorem for some nonlinear partial differential equations. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci* (5), 1996, 23: 119–148

附录 A

引理 A.1 FG 的范数有如下估计:

$$\|FG\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}} \leq \|F\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}} \|G\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}.$$

证明 因为 $(FG)_{kl\alpha\beta} = \sum_{k',l',\alpha',\beta'} F_{k-k',l-l',\alpha-\alpha',\beta-\beta'} G_{k'l'\alpha'\beta'}$, 所以有

$$\begin{aligned} \|FG\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}} &= \sup_{D_\rho(r,s)} \sum_{k,l,\alpha,\beta} |(FG)_{kl\alpha\beta}|_{\mathcal{O}} |I^l| |z^\alpha| |\bar{z}^\beta| e^{|k||\operatorname{Im}\theta|} \\ &\leq \sup_{D_\rho(r,s)} \sum_{k,l,\alpha,\beta} \sum_{k',l',\alpha',\beta'} |F_{k-k',l-l',\alpha-\alpha',\beta-\beta'} G_{k'l'\alpha'\beta'}|_{\mathcal{O}} |I^l| |z^\alpha| |\bar{z}^\beta| e^{|k||\operatorname{Im}\theta|} \\ &\leq \|F\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}} \|G\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}. \end{aligned}$$

我们完成了证明. □

引理 A.2 (广义 Cauchy 不等式) F 的各一阶导数有如下估计:

$$\begin{aligned}\|F_\theta\|_{D_\rho(r-\sigma,s),\mathcal{O}} &\leq \frac{c}{\sigma}\|F\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}, \\ \|F_I\|_{D_\rho(r,\frac{1}{2}s),\mathcal{O}} &\leq \frac{c}{s^2}\|F\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}, \\ \|F_z\|_{D_\rho(r,\frac{1}{2}s),\mathcal{O}} &\leq \frac{c}{s}\|F\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}, \\ \|F_{\bar{z}}\|_{D_\rho(r,\frac{1}{2}s),\mathcal{O}} &\leq \frac{c}{s}\|F\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}.\end{aligned}$$

证明 我们仅证明第三个不等式, 其余的证明类似. 令 $w \neq 0$, $f(t) = F(z + tw)$ 是在复数域上从 $|t| < \frac{s}{\|w\|_\rho}$ 到 $D_\rho(r, s)$ 的实解析映射. 通过 Cauchy 不等式, 可得

$$\|f'(0)\|_{D_\rho(r,\frac{1}{2}s),\mathcal{O}} = \|F_z w\|_{D_\rho(r,\frac{1}{2}s),\mathcal{O}} \leq \frac{c}{s}\|F\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}} \cdot \|w\|_\rho.$$

因为 $w \neq 0$, 所以,

$$\frac{\|F_z w\|_{D_\rho(r,\frac{1}{2}s),\mathcal{O}}}{\|w\|_\rho} \leq \frac{c}{s}\|F\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}},$$

因此,

$$\|F_z\|_{D_\rho(r,\frac{1}{2}s),\mathcal{O}} = \sup_{w \neq 0} \frac{\|F_z w\|_{D_\rho(r,\frac{1}{2}s),\mathcal{O}}}{\|w\|_\rho} \leq \frac{c}{s}\|F\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}}.$$

证毕. □

令 $\{\cdot, \cdot\}$ 代表光滑函数的 Poisson 括号, 等价于

$$\{F, G\} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial I}, \frac{\partial G}{\partial \theta} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial G}{\partial I} \right\rangle + i \left(\left\langle \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial G}{\partial z} \right\rangle \right),$$

然后我们有接下来的引理.

引理 A.3 如果

$$\|X_F\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}} < \varepsilon', \quad \|X_G\|_{D_\rho(r,s),\mathcal{O}} < \varepsilon'',$$

则有

$$\|X_{\{F,G\}}\|_{D_\rho(r-\sigma,\eta s),\mathcal{O}} < c\sigma^{-1}\eta^{-2}\varepsilon'\varepsilon'', \quad \eta \ll 1.$$

特别地, 如果 $\eta \sim \varepsilon^{\frac{1}{3}}$, $\varepsilon', \varepsilon'' \sim \varepsilon$, 则有 $\|X_{\{F,G\}}\|_{D_\rho(r-\sigma,\eta s),\mathcal{O}} \sim \varepsilon^{\frac{4}{3}}$.

证明 通过引理 A.2 和 A.3, 可得

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial^2 F}{\partial I \partial I} \frac{\partial G}{\partial \theta} \right\|_{D_\rho(r-\sigma,\frac{1}{2}s)} &< c\sigma^{-1}s^{-2} \left\| \frac{\partial F}{\partial I} \right\|_{D_\rho(r,s)} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \theta} \right\|_{D_\rho(r,s)}, \\ \left\| \frac{\partial^2 F}{\partial I \partial \theta} \frac{\partial G}{\partial \theta} \right\|_{D_\rho(r-\sigma,\frac{1}{2}s)} &< c\sigma^{-1} \left\| \frac{\partial F}{\partial I} \right\|_{D_\rho(r,s)} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \theta} \right\|_{D_\rho(r,s)}, \\ \left\| \frac{\partial^2 F}{\partial I \partial z} \frac{\partial G}{\partial \theta} \right\|_{D_\rho(r-\sigma,\frac{1}{2}s)} &< c\sigma^{-1}s^{-1} \left\| \frac{\partial F}{\partial I} \right\|_{D_\rho(r,s)} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \theta} \right\|_{D_\rho(r,s)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\partial^2 F}{\partial I \partial \bar{z}} \frac{\partial G}{\partial \theta} \right\|_{D_\rho(r-\sigma, \frac{1}{2}s)} &< c\sigma^{-1}s^{-1} \left\| \frac{\partial F}{\partial I} \right\|_{D_\rho(r,s)} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \theta} \right\|_{D_\rho(r,s)}, \\
 \left\| \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial I} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \right\|_{D_\rho(r-\sigma, \frac{1}{2}s)} &< c\sigma^{-1}s^{-2} \left\| \frac{\partial F}{\partial z} \right\|_{D_\rho(r,s)} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \right\|_{D_\rho(r,s)}, \\
 \left\| \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \theta} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \right\|_{D_\rho(r-\sigma, \frac{1}{2}s)} &< c\sigma^{-1} \left\| \frac{\partial F}{\partial z} \right\|_{D_\rho(r,s)} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \right\|_{D_\rho(r,s)}, \\
 \left\| \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial z} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \right\|_{D_\rho(r-\sigma, \frac{1}{2}s)} &< c\sigma^{-1}s^{-1} \left\| \frac{\partial F}{\partial z} \right\|_{D_\rho(r,s)} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \right\|_{D_\rho(r,s)}, \\
 \left\| \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \right\|_{D_\rho(r-\sigma, \frac{1}{2}s)} &< c\sigma^{-1}s^{-1} \left\| \frac{\partial F}{\partial z} \right\|_{D_\rho(r,s)} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \right\|_{D_\rho(r,s)}.
 \end{aligned}$$

其他情形可以通过类似的方式得到, 因此,

$$\|X_{\{F,G\}}\|_{D_\rho(r-\sigma,\eta s),\mathcal{O}} < c\sigma^{-1}\eta^{-2}\varepsilon'\varepsilon''.$$

证毕. □

最后给出一个构造切点容许集可行的方法: 对于任意给定的正整数 $b > 6$, 我们给一个构造切点容许集可行的方法. 对于集合 $S = \{i_1 = (x_1, y_1), i_2 = (x_2, y_2), \dots, i_b = (x_b, y_b)\}$, 首先, 选择 x_1, y_1, x_2 和 y_2 满足 $x_1 > b^2, y_1 = x_1^5, x_2 = y_1^5, y_2 = x_2^5$, 其余的按照下面定义的去迭代:

$$\begin{aligned}
 x_{j+1} &= y_j^5 \prod_{2 \leq m \leq j, 1 \leq l < m} ((x_m - x_l)^2 + (y_m - y_l)^2), \quad 2 \leq j \leq b-1, \\
 y_{j+1} &= x_{j+1}^5, \quad 2 \leq j \leq b-1.
 \end{aligned}$$

引理 A.4 上述构造的切点是容许集.

证明 注意到 $n - m + i - j + k - l = 0, |n|^2 - |m|^2 + |i|^2 - |j|^2 + |k|^2 - |l|^2 = 0$ 等价于

$$\langle n - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle = 0;$$

而 $n + m + i - j - k - l = 0, |n|^2 + |m|^2 + |i|^2 - |j|^2 - |k|^2 - |l|^2 = 0$ 等价于

$$\langle n - (j + l), n - (k - i) \rangle - \langle k - i, i \rangle + \langle j, l \rangle = 0.$$

为了证明性质 (1) (第 459 页), 即证对于任意的六元数组 $\{i, j, k, l, m, n\}$, S 不包含其中任意 5 个点, 满足 $n - m + i - j + k - l = 0$ 和 $|n|^2 - |m|^2 + |i|^2 - |j|^2 + |k|^2 - |l|^2 = 0$ 或者满足 $n + m + i - j - k - l = 0$ 和 $|n|^2 + |m|^2 + |i|^2 - |j|^2 - |k|^2 - |l|^2 = 0$, 只需证明

$$\langle n - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle \neq 0$$

和

$$\langle n - (j + l), n - (k - i) \rangle - \langle k - i, i \rangle + \langle j, l \rangle \neq 0.$$

对于任意的 5 个点 $i, j, k, l, n \in S$, 有

$$\frac{n_1 - (j_1 + l_1)}{n_2 - (j_2 + l_2)} > 0, \quad \frac{(j_2 + l_2) - (i_2 + k_2)}{(j_1 + l_1) - (i_1 + k_1)} > 0,$$

因此,

$$\frac{n_1 - (j_1 + l_1)}{n_2 - (j_2 + l_2)} + \frac{(j_2 + l_2) - (i_2 + k_2)}{(j_1 + l_1) - (i_1 + k_1)} > 0,$$

所以,

$$\begin{aligned} \langle n - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle &= [n_1 - (j_1 + l_1)][(j_1 + l_1) - (i_1 + k_1)] \\ &\quad + [n_2 - (j_2 + l_2)][(j_2 + l_2) - (i_2 + k_2)] \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

类似有

$$\langle j, l \rangle \neq 0, \quad \langle i, k \rangle \neq 0; \quad \langle f - (j + l), f - (k - i) \rangle \neq 0, \quad \langle k - i, i \rangle \neq 0, \quad \langle j, l \rangle \neq 0.$$

接下来, 证明 $\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle \neq 0$.

(I) 首先, 考虑 $\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}$ 中仅有一个元素取最大值.

(1) $|k| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}$.

根据切点 S 的选择, $\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle$ 的量级为 $\langle i + j + l - f, k \rangle$, 因此得到

$$\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle \neq 0.$$

(2) $|i| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}$.

根据切点 S 的选择, $\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle$ 的量级为 $\langle k + j + l - f, i \rangle$, 因此得到

$$\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle \neq 0.$$

(3) $|j| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}$.

根据切点 S 的选择, $\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle$ 的量级为 $|j|^2$, 因此得到

$$\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle \neq 0.$$

(4) $|l| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}$.

根据切点 S 的选择, $\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle$ 的量级为 $|l|^2$, 因此得到

$$\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle \neq 0.$$

(5) $|f| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}$.

如果 $j + l \neq i + k$, 根据切点 S 的选择, $\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle$ 的量级为 $|f|$; 如果 $j + l = i + k$, 则有 $m \in \mathbb{Z}_1^2$, $|f|^2 - |m|^2 + |i|^2 - |j|^2 + |k|^2 - |l|^2 = |f|^2 - |m|^2 \neq 0$, 同样得到

$$\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle \neq 0.$$

(II) 其次, 考虑 $\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}$ 有两个元素取到最大值.

(1) $|j| = |l| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}$.

我们有 $j = l$, 根据切点 S 的选择, $\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle$ 的量级为 $|j|^2$, 因此得到

$$\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle \neq 0.$$

$$(2) |i| = |k| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}.$$

我们有 $i = k$, 根据切点 S 的选择, $\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle$ 的量级为 $|i|^2$, 因此得到

$$\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle \neq 0.$$

$$(3) |i| = |j| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}.$$

我们有 $i = j$, 如果 $k \neq l$, 根据切点 S 的选择, $\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle$ 的量级为 $|i| \max\{|k|, |l|\}$; 如果 $k = l$, 则有 $m \in \mathbb{Z}_1^2$, $|f|^2 - |m|^2 + |i|^2 - |j|^2 + |k|^2 - |l|^2 = |f|^2 - |m|^2 \neq 0$, 同样得到

$$\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle \neq 0.$$

$$(4) |j| = |k| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}.$$

我们有 $j = k$, 如果 $i \neq l$, 根据切点 S 的选择, $\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle$ 的量级为 $|j| \max\{|i|, |l|\}$; 如果 $i = l$, 则有 $m \in \mathbb{Z}_1^2$, $|f|^2 - |m|^2 + |i|^2 - |j|^2 + |k|^2 - |l|^2 = |f|^2 - |m|^2 \neq 0$, 同样有

$$\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle \neq 0.$$

$$(5) |i| = |l| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}.$$

我们有 $i = l$, 如果 $k \neq j$, 根据切点 S 的选择, $\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle$ 的量级为 $|i| \max\{|k|, |j|\}$; 如果 $k = j$, 则有 $m \in \mathbb{Z}_1^2$, $|f|^2 - |m|^2 + |i|^2 - |j|^2 + |k|^2 - |l|^2 = |f|^2 - |m|^2 \neq 0$, 同样得到

$$\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle \neq 0.$$

$$(6) |i| = |f| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}.$$

我们有 $i = f$, 根据切点 S 的选择, $\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle$ 的量级为 $|f|^2$, 因此得到

$$\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle \neq 0.$$

$$(7) |j| = |f| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}.$$

我们有 $j = f$, 根据切点 S 的选择, $\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle$ 的量级为 $|f| \cdot |l|$, 因此得到

$$\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle \neq 0.$$

$$(8) |k| = |l| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}.$$

我们有 $k = l$, 如果 $i \neq j$, 根据切点 S 的选择, $\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle$ 的量级为 $|l| \max\{|i|, |j|\}$; 如果 $i = j$, 则有 $m \in \mathbb{Z}_1^2$, $|f|^2 - |m|^2 + |i|^2 - |j|^2 + |k|^2 - |l|^2 = |f|^2 - |m|^2 \neq 0$, 同样得到

$$\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle \neq 0.$$

$$(9) |k| = |f| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}.$$

我们有 $k = f$, 根据切点 S 的选择, $\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle$ 的量级为 $|f|^2$, 因此得到

$$\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle \neq 0.$$

$$(10) \quad |l| = |f| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}.$$

我们有 $l = f$, 根据切点 S 的选择, $\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle$ 的量级为 $|f| \cdot |j|$, 因此得到

$$\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle \neq 0.$$

(III) 最后, 考虑 $\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}$ 中至少有三个元素取到最大值. 通过取相反数, 变成 (I) 或 (II). 我们证明了

$$\langle f - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle \neq 0,$$

$\langle f - (j + l), f - (k - i) \rangle - \langle k - i, i \rangle + \langle j, l \rangle \neq 0$ 的证明类似, 这里省略.

当 $n - m + i - j + k - l = 0$ 时, $|n|^2 - |m|^2 + |i|^2 - |j|^2 + |k|^2 - |l|^2 = 0$ 等价于

$$\langle n - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle = 0;$$

$n + m + f - g - h - p = 0$, $|n|^2 + |m|^2 + |f|^2 - |g|^2 - |h|^2 - |p|^2 = 0$ 等价于 $\langle n - (g + p), n - (h - f) \rangle - \langle h - f, f \rangle + \langle g, p \rangle = 0$. 为了证明 S 是容许集, 下面证明性质 (2)–(4), 即证对于 $i, j, k, l, f, g, h, p \in S$ 且 $\{i, j, k, l\} \neq \{f, g, h, p\}$, 有

$$\begin{cases} lcl\langle n - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle = 0, \\ \langle n - (g + p), (g + p) - (f + h) \rangle - \langle g, p \rangle + \langle f, h \rangle = 0, \\ lcl\langle n - (j + l), n - (k - i) \rangle - \langle k - i, i \rangle + \langle j, l \rangle = 0, \\ \langle n - (g + p), n - (h - f) \rangle - \langle h - f, f \rangle + \langle g, p \rangle = 0, \\ lcl\langle n - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle = 0, \\ \langle n - (g + p), n - (h - f) \rangle - \langle h - f, f \rangle + \langle g, p \rangle = 0, \end{cases}$$

方程组在 $\mathbb{Z}_1^2$ 上没有解.

我们只给第一个方程组的证明, 其余类似, 省略.

(I) 首先, 考虑 $\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|, |g|, |h|, |p|\}$ 只有一个元素取到最大值.

(1) $|h| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|, |g|, |h|, |p|\}$.

通过初等计算, 有

$$\begin{aligned} n_2 = & \frac{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)[(g_1 + p_1)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1) + g_1 p_1 + g_2 p_2 - f_1 h_1 - f_2(g_2 + p_2 - f_2)]}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_2 + p_2 - f_2 - h_2) - (j_2 + l_2 - i_2 - k_2)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & - \frac{(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)[(j_1 + l_1)(j_1 + l_1 - i_1 - k_1) + (j_2 + l_2 - g_2 - p_2 - f_2)(j_2 + l_2 - i_2 - k_2)]}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_2 + p_2 - f_2 - h_2) - (j_2 + l_2 - i_2 - k_2)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & - \frac{(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)(j_1 l_1 + j_2 l_2 - i_1 k_1 - i_2 k_2)}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_2 + p_2 - f_2 - h_2) - (j_2 + l_2 - i_2 - k_2)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & + f_2 + g_2 + p_2. \end{aligned}$$

根据切点 S 的选择, 分子量级为 h_1 , 分母量级为 h_2 , 推出 $n_2 \notin \mathbb{Z}$.

$$(2) |f| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|, |g|, |h|, |p|\}.$$

同样地,

$$\begin{aligned} n_2 = & \frac{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)[(g_1 + p_1)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1) + g_1 p_1 + g_2 p_2 - f_1 h_1 - h_2(g_2 + p_2 - h_2)]}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_2 + p_2 - f_2 - h_2) - (j_2 + l_2 - i_2 - k_2)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & - \frac{(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)[(j_1 + l_1)(j_1 + l_1 - i_1 - k_1) + (j_2 + l_2 - g_2 - p_2 - h_2)(j_2 + l_2 - i_2 - k_2)]}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_2 + p_2 - f_2 - h_2) - (j_2 + l_2 - i_2 - k_2)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & - \frac{(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)(j_1 l_1 + j_2 l_2 - i_1 k_1 - i_2 k_2)}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_2 + p_2 - f_2 - h_2) - (j_2 + l_2 - i_2 - k_2)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & + g_2 + h_2 + p_2. \end{aligned}$$

根据切点 S 的选择, 分子量级为 f_1 , 分母量级为 f_2 , 推出 $n_2 \notin \mathbb{Z}$.

$$(3) |k| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|, |g|, |h|, |p|\}.$$

同样地,

$$\begin{aligned} n_2 = & \frac{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)[(g_1 + p_1)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1) + (g_2 + p_2 - j_2 - l_2 - i_2)(g_2 + p_2 - f_2 - h_2)]}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_2 + p_2 - f_2 - h_2) - (j_2 + l_2 - i_2 - k_2)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & + \frac{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1 p_1 + g_2 p_2 - f_1 h_1 - f_2 h_2)}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_2 + p_2 - f_2 - h_2) - (j_2 + l_2 - i_2 - k_2)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & - \frac{(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)[(j_1 + l_1)(j_1 + l_1 - i_1 - k_1) + j_1 l_1 + j_2 l_2 - i_1 k_1 - i_2(j_2 + l_2 - i_2)]}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_2 + p_2 - f_2 - h_2) - (j_2 + l_2 - i_2 - k_2)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & + i_2 + j_2 + l_2. \end{aligned}$$

根据切点 S 的选择, 分子量级为 k_1 , 分母量级为 k_2 , 推出 $n_2 \notin \mathbb{Z}$.

$$(4) |i| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|, |g|, |h|, |p|\}.$$

同样地,

$$\begin{aligned} n_2 = & \frac{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)[(g_1 + p_1)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1) + (g_2 + p_2 - j_2 - l_2 - k_2)(g_2 + p_2 - f_2 - h_2)]}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_2 + p_2 - f_2 - h_2) - (j_2 + l_2 - i_2 - k_2)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & + \frac{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1 p_1 + g_2 p_2 - f_1 h_1 - f_2 h_2)}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_2 + p_2 - f_2 - h_2) - (j_2 + l_2 - i_2 - k_2)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & - \frac{(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)[(j_1 + l_1)(j_1 + l_1 - i_1 - k_1) + j_1 l_1 + j_2 l_2 - i_1 k_1 - k_2(j_2 + l_2 - k_2)]}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_2 + p_2 - f_2 - h_2) - (j_2 + l_2 - i_2 - k_2)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & + j_2 + k_2 + l_2. \end{aligned}$$

根据切点 S 的选择, 分子量级为 i_1 , 分母量级为 i_2 , 推出 $n_2 \notin \mathbb{Z}$.

$$(5) |g| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|, |g|, |h|, |p|\}.$$

同样地,

$$\begin{aligned} n_2 = & \frac{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)[(g_1 + p_1)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1) + g_1 p_1 + g_1^5 p_1^5 - f_1 h_1 - f_1^5(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5)]}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & - \frac{(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)[(j_1 + l_1)(j_1 + l_1 - i_1 - k_1) + (j_1^5 + l_1^5 - g_1^5 - p_1^5 - f_1^5)(j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)]}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & - \frac{(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)(j_1 l_1 + j_1^5 l_1^5 - i_1 k_1 - i_1^5 k_1^5)}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & + f_2 + g_2 + p_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)[(g_1 + p_1)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1) + g_1 p_1 - f_1 h_1 - f_1^5(p_1^5 - f_1^5)]}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\
&\quad - \frac{(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)[(j_1 + l_1)(j_1 + l_1 - i_1 - k_1) + (j_1^5 + l_1^5 - p_1^5 - f_1^5)(j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)]}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\
&\quad - \frac{(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)(j_1 l_1 + j_1^5 l_1^5 - i_1 k_1 - i_1^5 k_1^5)}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\
&\quad + \frac{(f_1^5 + h_1^5 - p_1^5)(p_1^5 - f_1^5)(j_1 + l_1 - i_1 - k_1) + (p_1^5 - f_1^5)(j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\
&\quad + \frac{(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)(j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)g_1^5}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\
&\quad + f_2 + g_2 + p_2 + p_1^5 - f_1^5.
\end{aligned}$$

根据切点 S 的选择, 前 4 个分数的分子量级为 g_1^2 , 分母量级为 g_1^5 ; 第 5 个分数可以分解为一个整数加上一个分子量级为 g_1^4 、分母量级为 g_1^5 的分数, 同样推出 $n_2 \notin \mathbb{Z}$.

$$(6) |p| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|, |g|, |h|, |p|\}.$$

证明类似于 (5).

$$(7) |j| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}.$$

同样地,

$$\begin{aligned}
n_2 &= \frac{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)[(g_1 + p_1)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1) + (g_1^5 + p_1^5 - j_1^5 - l_1^5 - k_1^5)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5)]}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\
&\quad + \frac{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1 p_1 + g_1^5 p_1^5 - f_1 h_1 - f_1^5 h_1^5)}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\
&\quad - \frac{(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)[(j_1 + l_1)(j_1 + l_1 - i_1 - k_1) + j_1 l_1 + j_1^5 l_1^5 - i_1 k_1 - k_1^5(j_1^5 + l_1^5 - k_1^5)]}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\
&\quad + j_2 + k_2 + l_2 \\
&= \frac{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)[(g_1 + p_1)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1) + (g_1^5 + p_1^5 - l_1^5 - k_1^5)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5)]}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\
&\quad + \frac{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1 p_1 + g_1^5 p_1^5 - f_1 h_1 - f_1^5 h_1^5)}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\
&\quad - \frac{(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)[(j_1 + l_1)(j_1 + l_1 - i_1 - k_1) + j_1 l_1 - i_1 k_1 - k_1^5(l_1^5 - k_1^5)]}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\
&\quad + \frac{(l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)(l_1^5 - k_1^5) - (j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(l_1^5 - k_1^5)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5)}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\
&\quad - \frac{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5)j_1^5}{(j_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (j_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\
&\quad + j_2 + k_2 + l_2 + l_1^5 - k_1^5.
\end{aligned}$$

根据切点 S 的选择, 前 4 个分数的分子量级为 j_1^2 , 分母量级为 j_1^5 ; 第 5 个分数可以分解为一个整数加上一个分子量级为 j_1^4 、分母量级为 j_1^5 的分数, 同样推出 $n_2 \notin \mathbb{Z}$.

$$(8) |l| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|, |g|, |h|, |p|\}.$$

证明类似 (7).

(II) 其次, 考虑 $\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|, |g|, |h|, |p|\}$ 中有两个元素取到最大值.

$$(1) |g| = |j| = \max\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|, |g|, |h|, |p|\}.$$

我们有 $g = j$ 和

$$\begin{cases} lcl\langle n - (j + l), (j + l) - (i + k) \rangle - \langle j, l \rangle + \langle i, k \rangle = 0, \\ \langle n - (j + p), (j + p) - (f + h) \rangle - \langle j, p \rangle + \langle f, h \rangle = 0. \end{cases}$$

通过初等计算有

$$\begin{aligned} n_2 = & \frac{(g_1 + l_1 - i_1 - k_1)[(g_1 + p_1)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1) + g_1 p_1 - f_1 h_1 - f_1^5(p_1^5 - f_1^5)]}{(g_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (g_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & - \frac{(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)[(g_1 + l_1)(g_1 + l_1 - i_1 - k_1) + (l_1^5 - p_1^5 - f_1^5)(l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)]}{(g_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (g_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & - \frac{(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)(g_1 l_1 - i_1 k_1 - i_1^5 k_1^5)}{(g_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (g_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & + \frac{(f_1^5 + h_1^5 - p_1^5)(p_1^5 - f_1^5)(g_1 + l_1 - i_1 - k_1) + (p_1^5 - f_1^5)(l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)}{(g_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (g_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} \\ & + \frac{2(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)(p_1^5 - l_1^5)}{(g_1 + l_1 - i_1 - k_1)(g_1^5 + p_1^5 - f_1^5 - h_1^5) - (g_1^5 + l_1^5 - i_1^5 - k_1^5)(g_1 + p_1 - f_1 - h_1)} g_1^5 \\ & + f_2 + g_2 + p_2 + p_1^5 - f_1^5. \end{aligned}$$

根据切点 S 的选择, 前 4 个分数的分子量级为 g_1^3 , 分母量级为 g_1^6 ; 第 5 个分数可以分解为一个整数加上一个分子量级为 g_1 、分母量级为 g_1^5 的分数, 同样推出 $n_2 \notin \mathbb{Z}$.

其余情形类似.

(III) 最后, 考虑 $\{|i|, |j|, |k|, |l|, |f|\}$ 中至少有三个元素取到最大值. 通过取相反数, 变成 (I) 或 (II). 我们证明了第一个方程组在 $\mathbb{Z}_1^2$ 上没有解. 其余情形证明类似. 我们给出了一个可行的构造容许集的方法并且证明了它是容许集. $\square$

Reducible KAM tori for two-dimensional quintic Schrödinger equations

Jiansheng Geng & Shuaishuai Xue

Abstract We prove an infinite-dimensional KAM theorem, which could be applied to study the two-dimensional quintic Schrödinger equations $iu_t - \Delta u + |u|^4 u = 0$ ($t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{T}^2$) with periodic boundary conditions. We obtain a Whitney smooth family of small amplitude quasi-periodic solutions which are partially hyperbolic.

Keywords quintic Schrödinger equation, reducible KAM tori, partially hyperbolic, quasi-periodic solutions

MSC(2010) 37K55, 35B10, 35J10, 35Q40, 35Q55

doi: 10.1360/SCM-2018-0793