多复变简介: 与单复变的联系

献给杨乐教授 80 华诞

周向宇

中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所, 北京 100190

E-mail: xyzhou@math.ac.cn

收稿日期: 2019-08-01; 接受日期: 2019-08-07; 网络出版日期: 2019-09-17

国家自然科学基金 (批准号: 11688101) 资助项目

摘要 本文围绕解析延拓, 阐述多复变的一些基本内容、思想、方法及进展, 并简述与单复变的联系.

关键词 解析延拓 多次调和函数 乘子理想层 L^2 延拓 全纯域

MSC (2010) 主题分类 32D05, 32D15, 32U05, 14C30, 32T05, 32Q28

1 引言

20 世纪 80 年代在北京读研究生时, 常听说这样的事, 当人们欲进某个单位时, 门卫会问: 你是谁, 你从哪里来, 你到哪里去. 这可被称为“门卫问题”, 犹如哲学终极问题. 儒释道似乎在回答这个问题.

这里, 我们考虑套用在学科发展上的类似问题: 多复变是什么, 多复变从哪里来, 多复变到哪里去. “从哪里来”是看过去、看历史, “到哪里去”是看未来、看前途. Poincaré 说过, 展望未来, 最好的方式是研究过去与现在. 所以, 本文重点放在回顾过去与叙述现在, 而且主要围绕解析延拓这一多复变发展的一条主线, 十分扼要地阐述多复变的发展, 并简要兼述与单复变的联系.

庄圻泰先生与杨乐先生在为《中国大百科全书》数学卷撰写“复变函数论”条目时, 写道: “复变函数理论从一个变数推广到多个变数是十分自然的想法, 总称为复分析.”

2 多复变是什么

多复变函数论是“数学中研究多个复变量的全纯函数的性质和结构的分支学科”(钟家庆, 《中国大百科全书》数学卷).

用范畴 (category) 的语言来说, 多复变是研究复解析范畴的学问. 这里, 范畴的对象 (objects) 是复流形 (乃至复空间), 态射 (morphisms) 是复流形 (乃至复空间) 之间的复解析映照.

英文引用格式: Zhou X Y. A brief introduction of several complex variables (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1347–1358, doi: 10.1360/SSM-2019-0196

简言之, 多复变研究复流形 (复空间) 及其间的全纯映照.

多复变有时也被称为 (特别是在法国) 复解析几何 ((complex) analytic geometry), 由 Serre 引入. Serre 著名的 GAGA 原理其中一个 GA 指代数几何, 另一个 GA 指解析几何.

Bourbaki 学派认为 “多复变是所有数学学科当中最深刻、最困难的理论之一” (参见文献 [1]).

Dieudonné 在《纯数学概观》(A panorama of pure mathematics) 一书中, 对各学科按 Bourbaki 学派关注程度分类, 列 “复解析几何” (多复变) 为 Bourbaki 关注度 (Bourbaki density) A 类 (即最受关注的).

3 多复变从哪里来

曾在国际数学家大会作过四次大会报告的 Volterra 认为 19 世纪是函数论的世纪. 这主要是指单复变函数论. Cauchy、Riemann 和 Weierstrass 是主要奠基者. 椭圆函数论是单复变的重要分支, Abel、Jacobi 和 Weierstrass 等是主要奠基者. 19 世纪末, 出现了不少多复变函数的例子, 如 Abel 函数、theta 函数、超几何函数和带参数的复变函数. 那时, 人们普遍认为, 多复分析只是单复分析的简单推广.

如同单复变, 在多复变中同样可分别按 Cauchy 方式、Riemann 方式和 Weierstrass 方式定义函数的复可微、全纯 ($\bar{\partial}f = 0$) 和复解析, 还可定义逐变量复可微 (separately complex differential) (全纯、复解析). 这几个定义通过 Cauchy 积分公式和 Hartogs 定理是等价的. 同样, 在多复变中, 也有唯一性定理、极大模原理、对全纯函数的开映照定理等.

多复变的产生源自于 20 世纪初该学科若干有自身特点的本质发现, 如 Poincaré 和 Hartogs 的发现, 从而多复变作为一个独立研究分支获得发展. Poincaré 发现, 在多复变中, 单位球与多圆盘不是双全纯等价的, 虽然两个域均是有界凸域; 而单复变中, 由 Riemann 映照定理知, 任意两个有界凸域是双全纯等价的. 下面将要介绍的 Hartogs 现象是关于解析延拓的, 这一发现是多复变一个核心内容的滥觞.

3.1 解析延拓

解析延拓 (analytic continuation 或 holomorphic extension) 是复分析中的一个根本现象. 这里有两类重要的解析延拓: 一类是从区域 (形) 到更大的区域的延拓, 这是同维数空间中的延拓; 一类是从子流形到母流形的延拓, 这是不同维数空间中的延拓.

3.1.1 解析延拓: 单复变

由 Cauchy、Riemann 和 Weierstrass 的先驱工作, 解析延拓十分重要.

在单复变中, 解析延拓的思想与方法导致了 Riemann 面的引入 (Cauchy、Riemann)、解析层等重要概念的产生, 以及 Schwarz 反射原理、插值定理、Mittag-Leffler 定理、Weierstrass 零点定理等重要成果的发现; 被用于 Picard 大定理的证明、单值化定理的证明等. Riemann 将 ζ 函数在复平面作解析延拓, 发现该函数的零点分布与素数分布有神奇联系, 并提出著名的 Riemann 假设.

Cauchy 积分公式和 Weierstrass 幂级数方法是解析延拓的基本技术.

Riemann ζ 函数来源于 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$, $s > 1$. Euler 发现该函数与素数的关系, 即 Euler 积: $\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$, 这里 p 是素数, 由此可得 $\sum_p \frac{1}{p} = +\infty$.

Riemann 考虑: $s \in \mathbb{C}$ 的 ζ 函数. 这体现了一种复变函数的思想: 为了对函数作圆满的分析, 通常需要考虑它们在复数域上的性质, 因 $\mathbb{C}$ 是代数闭域. 这也体现了数学中一种重要的复化思想.

Riemann 应用了解析延拓的思想: $\zeta(s)$ 解析延拓至 $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, $s = 1$ 是单极点, 负偶数是平凡零点.

Riemann 发现: $\zeta(s)$ 的非平凡零点的分布与素数分布密切相关.

事实上, $\zeta(s)$ 在 $\operatorname{Re} s = 1$ 无零点可推出素数定理 (Legendre 猜想、Gauss 猜想). Hadamard 和 de la Vallée-Poussin 证明了 $\zeta(s)$ 在 $\operatorname{Re} s = 1$ 无零点.

Riemann 假设: $\zeta(s)$ 的非平凡零点位于 $\operatorname{Re} s = 1/2$.

3.1.2 解析延拓: 多复变

Hartogs 现象: 当 $n \geq 2$, 有 $\mathbb{C}^n$ 中的区域, 其上所有全纯函数都能解析延拓至更大的区域. 例如, 当 $n \geq 2$ 时, 穿孔单位球 $B_n \setminus \{0\}$ 上的所有全纯函数一定在单位球上全纯. 该例子由 Adolf Hurwitz 在 1897 年首届国际数学家大会的演讲中给出.

该现象导致多复变的基本概念—全纯域的自然引入.

全纯域 (domain of holomorphy) 的定义: 区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 不发生 Hartogs 现象, 即存在一个全纯函数 f , 使得 D 是 f 的自然定义 (或存在) 域 (D 的边界称为自然边界).

区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 称为弱全纯域, 若对严格包含 D 的一个区域 $\tilde{D}$, 存在 D 上全纯函数但不在 $\tilde{D}$ 上全纯; D 称为全纯凸域, 若任意紧子集的全纯凸包仍是紧子集, 或等价地, 对 D 中任意离散点列, 存在 D 上且在该离散点列上无界的全纯函数.

定理 (H. Cartan-Thullen): 弱全纯域 $\Leftrightarrow$ 全纯凸域 $\Leftrightarrow$ 全纯域.

例如, $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ 是 Riemann ζ 函数的全纯域; $\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n!}$ 的自然定义 (或存在) 域是单位圆盘 Δ . 在单复变中, 每一区域都是全纯域, 即对于区域 $D \subset \mathbb{C}^1$, 存在全纯函数 f , 使得 f 不能解析定义在更大的域上, 证明可参见 Rudin 的书 *Real and Complex Analysis*; 而在多复变中, 并非每一区域都是全纯域, 例如, $B_n \setminus \{0\}$ ($n \geq 2$) 不是全纯域 (由 Hartogs 现象). 已知, 凸域、有界齐性域、典型域、Teichmüller 空间都是全纯域 (L. Bers).

4 多复变经典基本内容

关于全纯域与全纯包方向的一些著名问题如 Levi 问题、Cousin I 问题和 Cousin II 问题 (单复变 Mittag-Leffler 定理、Weierstrass 定理的相应推广) 等的研究, 在 Hartogs、Levi、Cousin、Oka 和 H. Cartan 等多复变先驱在 20 世纪上半叶的重要工作基础上自然产生, 构成多复变基本与核心内容, 形成一条主线. Kiyoshi Oka 是多复变的主要奠基者, 曾获日本文化勋章, 最近日本有一部关于他与夫人的电影. H. Cartan 是 E. Cartan 的长子, Bourbaki 学派的主要创始人, 曾获 Wolf 奖.

多次调和函数 (20 世纪 40 年代 Lelong 和 Oka 引入) 是十分重要的概念, 容许有奇点 (即可取 $-\infty$). 作为位势, 局部与正闭 $(1,1)$ - 泛流 (positive closed $(1,1)$ -current) 等同.

拟凸域 (pseudo-convex domain): 存在域上多次调和函数, 在边界趋于无穷大.

由 Cartan-Tullen 定理知, 全纯域等同于全纯凸域, 从而可以证明, 全纯凸域是拟凸域. 多复变中一个核心问题是, 该命题的逆对不对, 即

Levi 问题: 拟凸域是全纯域.

该问题由 Oka、Norguet 和 Bremermann 20 世纪 50 年代初解决.

Levi 问题就是把全纯域的刻画跳出了构造复 (解析) 函数的框框, 而用构造实函数 (多次调和函数) 来刻画.

在单复变中, Mittag-Leffler 定理断言: 开 Riemann 面上, 在离散点列处具预定亚纯部分的整体亚纯函数是存在的; Weierstrass 零点定理或因式分解定理断言: 开 Riemann 面上, 在离散点列处具预定零点的整体全纯函数是存在的, 这是多项式因式分解定理的推广; 插值定理断言: 开 Riemann 面上, 在离散点列处取预定数值的整体全纯函数是存在的, 这其实是一个解析延拓定理.

针对 Levi 问题、Cousin I 问题和 Cousin II 问题 (单复变 Mittag-Leffler 定理、Weierstrass 零点定理在高维的类似) 等, 产生了与代数、几何、分析紧密相关的重要方法: 层及其上同调论 (由 Leray 引进) 方法、 $\bar{\partial}$ 方程的 L^2 方法和积分表示方法等. 这些方法均可用来解决上述 Levi 问题, Cousin I、II 问题等.

这里一个关键角色是凝聚解析层 (coherent analytic sheaf). 凝聚性反映了解析延拓的一个局部原则.

凝聚解析层的例子包括结构层、解析集的理想层、凝聚解析层的正规化 (normalization)、凝聚解析层在逆紧全纯映射下的高阶直接像 (high direct image) (Grauert 直接像定理, 它的一个推论是 Remmert 逆紧映射定理).

全纯域在复流形上的类似是 Stein 流形, 即全纯凸、全纯分离的复流形. 全纯凸复流形如上同样定义; 全纯分离复流形是指任给两个不同的点, 存在流形上的全纯函数使得在两点的值不同.

德国战后最杰出的数学家之一 Grauert (ICM 1962 大会报告人) 解决了复流形上的 Levi 问题, 即什么样的复流形是 Stein 流形: Kähler 穷竭性蕴含 Stein 性. 这里, Kähler 穷竭性是指一个具穷竭、整体位势的 Kähler 度量的存在性. 这是一个复微分几何的条件.

Stein 流形是仿射复子流形 (Bishop-Narasimhan-Remmert 嵌入定理), 即 Stein 流形总可拟紧全纯嵌入于某个 $\mathbb{C}^N$. Gromov-Eliashberg 和 Schürmann 证明了 $n > 1$ 维 Stein 流形可逆紧全纯嵌入于 $\mathbb{C}^{\lfloor 3n/2 \rfloor + 1}$, 且 $\lfloor 3n/2 \rfloor + 1$ 是最小可能的.

$n = 1$ 时该论述尚未解决, 即开 Riemann 面是否可逆紧全纯嵌入于 $\mathbb{C}^2$ 是一个未解决的问题.

Stein 流形整体理论的核心是 Cartan 定理 A 和 B:

设 $\mathcal{F}$ 是 Stein 流形 M 上的凝聚解析层, 则下面的定理:

定理 A 芽 $\mathcal{F}_x$ 由整体截面 $\Gamma(M, \mathcal{F})$ 生成.

定理 B $H^q(M, \mathcal{F}) = 0$ 对 $q \geq 1$ 成立.

定理 B 蕴含定理 A, 且与下述延拓定理等价:

Oka-Cartan 延拓定理 设 S 是 Stein 流形 M 的闭复子簇, 那么全纯向量丛限制在 S 上的任意全纯截面 f 可以全纯解析延拓到 M 上的全纯截面 F .

该定理在一维的特例是插值定理. 这些结果由 Serre 用来建立 GAGA 原理. 这些重要结果构成 Oka-Cartan 延拓理论的核心.

Oka-Cartan 延拓理论也包括这些重要结果与 $\bar{\partial}$ -方程的求解的重要联系. Dolbeault 同构定理告诉我们: $H^q(M, \Omega^p) = 0$ 当且仅当 $\bar{\partial}$ -方程可解.

当 M 是 Stein 流形时, $H^q(M, \Omega^p) = 0$ 对 $q > 0$ 成立 (由 Cartan 定理 B). 这里一个未解决的问题是, 上述的逆是否正确?

习知, 在单位球或多圆盘上 Poincaré 引理成立, 即对 (p, q) 形式, $q > 0$, $\bar{\partial}$ 方程是可解的. 自然有人问, 在可收缩域上 Poincaré 引理是否成立.

当 D 是 $\mathbb{C}^n$ 中一个区域, 则 D 是全纯域当且仅当 $H^q(M, \Omega^p) = 0$ 对 $q > 0$ 成立, 或 $H^q(M, \mathcal{O}) = 0$ 对 $q > 0$ 成立, 亦即, Poincaré 引理成立. 特别地, 在凸域上 Poincaré 引理成立. 然而存在可收缩域但不是全纯域. 例如, 星形域 $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1/2\} \cup \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1/2, |z_2| < 1\}$ 是可收缩域但不是全纯域.

20 世纪上半叶, 许多数学家包括 Weyl、Hodge、Kodaira、Morrey 和 Spencer 等对 Hodge 理论及 L^2 Hodge 理论的建立与发展作出贡献. 至 20 世纪 60 年代, 通过解 $\bar{\partial}$ 方程可以证明著名的 Hartogs 现象 (Ehrenpreis, 1961). 另外, Hörmander、Andreotti-Vesentini 和 Kohn 等建立了解 $\bar{\partial}$ 方程的 L^2 方法. 该方法综合 PDE 与泛函分析, 建立在 Hilbert 空间上无界、闭稠定算子的框架下, 得到了解 $\bar{\partial}$ 方程的 L^2 存在性定理 (L^2 existence theorem). 该定理十分有用, 可以证明 Oka-Cartan 理论中的基本问题, 如 Oka-Cartan 延拓定理、Levi 问题以及 Cousin 问题 I、II 等.

什么样的复流形是 Stein 流形? (Levi 问题) 这由 Grauert 解决^[2]; 什么样的复流形是射影代数流形? 这由 Kodaira 解决 (Kodaira 嵌入定理). 这些问题构成多复变与复几何的基本问题, 即构造或证明存在特定的全纯对象, 如全纯函数或全纯截面等.

Kodaira 嵌入定理断言: 正全纯线丛 L 是丰沛的, 即 mL 的整体截面 ($m \gg 1$) 给出复流形至复射影空间的嵌入.

全纯线丛上的光滑 Hermite 度量局部由 $e^{-\varphi}$ 给出, 其中 φ 光滑. 这时, 曲率 $\Theta = i\partial\bar{\partial}\varphi$. 正全纯线丛即指 φ 是光滑强多次调和函数.

Grauert 对 Levi 问题的解决、Kodaira 嵌入定理、Hörmander 的具奇异权函数的 L^2 存在定理反映的思想:

(1) 复微分几何条件蕴含复解析结论;

(2) 特定全纯函数或截面的存在或构造问题退化至特定多次调和函数 (实值, 可取 $-\infty$) 的存在或构造.

通常全纯函数或截面是刚性、“hard” 对象, 证明存在或构造起来较困难; 而多次调和函数或“泛流” (currents) 是柔性、“soft” 对象, 证明存在或构造起来较容易.

本节的内容可参见文献 [3–14].

5 多复变前沿核心内容

萧荫堂指出, L^2 延拓与乘子理想层是其解决代数几何重要猜想的主要组成部分, 如射影代数流形的多亏格形变不变性 (参见文献 [15–20]).

丘成桐指出: “乘子理想层在现代高维代数几何中起一个核心作用” (PM, Springer 2015).

L^2 延拓与乘子理想层及相关内容是萧荫堂、Demailly 两次 ICM 大会报告的主题 (参见文献 [18, 21]):

Siu Y T. Some recent transcendental techniques in algebraic and complex geometry. Proc. of ICM. 2002.

Demailly J P. Kähler manifolds and transcendental techniques in algebraic geometry. Proc. of ICM. 2006.

5.1 乘子理想层

新近方法: 乘子理想层 (multiplier ideal sheaf) 可看成凝聚解析层及其上同调思想与方法与 $\bar{\partial}$ 方程的 L^2 思想与方法之综合.

凝聚解析层及其上同调理论在 20 世纪 50 年代由 Cartan、Serre 和 Grauert 等建立与发展; $\bar{\partial}$ 方程的 L^2 思想与方法在 20 世纪 60 年代由 Hörmander、Kohn 和 Andreotti-Vesentini 等建立与发展; 乘子理想层思想与方法在 20 世纪 70 年代 Bombieri 和 Skoda 的工作中已初见端倪, 在 20 世纪 90 年代由 Siu、Nadel 和 Demailly (法国科学院院士, ICM 2006 大会报告人) 等建立与发展.

定义 (Nadel 1990 Ann of Math) 给定复流形 $(X, \mathcal{O})$ 上多次调和函数 φ , 乘子理想层 $\mathcal{I}(\varphi) \in \mathcal{O}$ 由满足 $|f|^2 e^{-2\varphi}$ 在 x 附近局部可积的全纯函数芽 $f \in \mathcal{O}_x$ 组成.

乘子理想层有如下基本性质:

Nadel 定理 $\mathcal{I}(\varphi)$ 是凝聚解析层.

定理 乘子理想层是整闭的 (integrally closed), 即 $\mathcal{I}(\varphi)$ 的整闭包是自身.

Nadel 消没定理 设 $(L, e^{-\varphi})$ 是紧 Kähler 流形 (X, ω) 上的 big 线丛 (即奇异度量的曲率流动形 (curvature current Θ) 是 Kähler 流动形: $\exists \epsilon > 0$, 使得 $\Theta \geq \epsilon\omega$), 那么对任意 $q \geq 1$, 有

$$H^q(X, K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(\varphi)) = 0.$$

当 φ 是光滑时, $\mathcal{I}(\varphi)$ 是平凡的, 此时定理即 Kodaira 消没定理; 另外该定理也是 Kawamata-Viehweg 消没定理的推广.

乘子理想层可用来以统一方式给出 Levi 问题的解决及 Kodaira 嵌入定理的证明, 从而使多复变与代数几何再现融合.

这里反映的思想是:

- 多次调和函数的奇性起一个关键作用. 研究奇性、构造奇性、用好奇性是重要的. 奇性如奇异积分、Newton 位势、基本解、广义函数 (分布)、泛流、Green 函数、Dirac 函数和 Poincaré-Lelong 方程等在数学中十分重要, 许多数学家如 Green、Riemann、Weyl 和 Dirac 等作出了重要贡献.

关于多次调和函数奇性的基本事实如下:

- 多次调和函数 φ 的奇点: $\varphi(z) = -\infty$; 奇点集称为多极集 (pluripolar set). 例如, $\varphi = c \log(|f_1|^2 + \cdots + |f_k|^2)$ 是多次调和函数, 这里 $f_1, \dots, f_k$ 是全纯函数, $c > 0$.
- 解析集与多极集的基本关系: $f_1^{-1}(0) \cap \cdots \cap f_k^{-1}(0) = \varphi^{-1}(-\infty)$.
- 上述例子的多次调和函数在差一个有界函数时称为具解析奇性的多次调和函数.
- 全纯线丛上的奇异 Hermite 度量局部由 $e^{-\varphi}$ 给出, 其中 $\varphi \in L^1_{\text{loc}}$. 曲率在流动形 (currents) 意义下仍可定义为 $\Theta = i\partial\bar{\partial}\varphi$. 拟有效线丛 (pseudoeffective line bundle) 是具奇异 Hermite 度量的全纯线丛, 满足 $\Theta \geq 0$, 即 φ 是多次调和函数.

复分析与代数几何的联系, 超越方法在代数几何中的运用由来已久, 如从 19 世纪的 Abel、Jacobi、Riemann 等到 20 世纪的 Weyl、Hodge、Kodaira、Hirzebruch 和 Grauert 等.

紧 Riemann 面是射影代数的, 非紧 Riemann 面是 Stein 的.

射影代数流形除去某个超曲面是 Stein 流形, 该超曲面是某个正线丛的全纯截面的零点集. 这是射影代数流形与 Stein 流形的基本关系, 可建立代数几何与多复变的联系, L^2 延拓定理 (越过 (across) 复子簇或从 (from) 复子簇) 起一个重要的联接角色.

5.2 L^2 延拓问题

L^2 延拓理论是 Oka-Cartan 延拓理论与 L^2 方法的交融.

具良好估计的 L^2 延拓问题:

在上述 Oka-Cartan 延拓定理中, 对合适的流形对 (M, S) , 若全纯函数或截面 f 在 S 上还满足 L^2 条件, 问题是寻找 M 上 L^2 全纯延拓 F 并具有良好估计 (F 的 L^2 范数由 f 的 L^2 范数控制) [22].

见 Demailly: *Analytic Methods in Algebraic Geometry*. Beijing: Higher Education Press, 2010.

当 M 是 Stein 流形, 在合适几何条件下, Ohsawa 和 Takegoshi [23] 1987 年建立 L^2 延拓定理 (具粗糙估计), 被萧荫堂、Demailly 等发现在代数几何、多复变中有关键应用, 显现出重要性. 之后许多数学家对具良好估计的 L^2 延拓问题有贡献, 包括: Ohsawa (ICM 1990 邀请报告人) 本人, 他写了关于 L^2 延拓定理的系列论文; Siu (美国国家科学院院士, ICM 1983、2002 大会报告人) (参见文献 [24, 25]); Demailly (法国科学院院士, ICM 2006 大会报告人); Berndtsson (瑞典皇家科学院院士, ICM 2018 邀请报告人) 等.

这些重要工作后遗留如下问题未解决.

最优 L^2 延拓问题:

寻找 M 上 L^2 全纯延拓 F 并具有最优估计.

6 多复变前沿进展**6.1 最优 L^2 延拓**

文献 [26] 解决了最优 L^2 延拓问题, 建立了一般框架的最优 L^2 延拓定理, 涵盖了以往诸多 L^2 延拓定理. 作为应用, 我们解决了一批公开问题, 包括长期悬而未决的 Suita 猜想, 并发现最优 L^2 延拓定理的新的联系.

文献 [26] 基于发表于 Comptes Rendus 2011 [27], Liouville's J. 2012 [28], Comptes Rendus 2012 [29], Science China Math. 2015 [30] 等一系列工作, 其中发表于 Liouville's J. 2012 的工作是研究最优 L^2 延拓问题的一个新起点和转折点.

这些工作提出了待定权函数与扭因子的思想, 首次将该问题转化为 ODE 求解, 解决了该问题.

► Suita 猜想 (1972):

在开 Riemann 面 Ω 上, 成立 $(c_\beta(z))^2 |dz|^2 \leq \pi \kappa_\Omega(z)$; 更进一步, $(c_\beta(z))^2 |dz|^2 = \pi \kappa_\Omega(z)$ 对 $z \in \Omega$ 成立当且仅当 Ω 共形等价于单位圆盘除去一个可能的内容量 (inner capacity) 为 0 的闭集.

这里 $\kappa_\Omega(z)$ 是由 Ω 上平方可积的全纯微分 1- 形式定义的 Berman 核. 对数容量 (logarithmic capacity) $c_\beta(z)$ 局部定义为

$$c_\beta(z) := \exp \lim_{\xi \rightarrow z} (G_\Omega(\xi, z) - \log |\xi - z|).$$

它的平方是一个 $(1,1)$ 型张量, $c_\beta(z)|dz|$ 是整体良定的.

Riemann 面上的 Suita 猜想 (不等式部分) 有如下的等价形式: 记 Γ 为 Riemann 面 Ω 的 Fuchsian 群, e 为单位元.

Riemann 面上的 Suita 猜想 (不等式部分) 等价于

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma'(0) \geq \prod_{\gamma \in \Gamma, \gamma \neq e} |\gamma(0)|^2.$$

其他推论: Ohsawa 多个问题的解决, 包括下文中的一个问题的解决 (参见文献 [31]),

Ohsawa T. On the extension of L^2 holomorphic functions VIII—a remark on a theorem of Guan and Zhou, IJM 2017.

我们发现文献 [26] 最优 L^2 延拓定理蕴含了 Berndtsson 的相对 Bergman 核的对数 - 多次调和性, 同样的证明蕴含了相对典则丛的 Griffiths 正性 (Guan, Zhou, Sci. China Math. 2017) [31]. 也就是说, 最优 L^2 延拓定理具有几何意义.

6.2 Demailly 强开性猜想

Demailly 关于乘子理想层的强开性猜想叙述如下:

$$\mathcal{I}(\varphi) = \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{I}((1 + \varepsilon)\varphi).$$

该猜想由我们在 2013 年解决 (参见文献 [32]).

- 该猜想也由 Siu^[19] 和 Demailly-Kollár^[33] 等许多数学家提出.
- $n = 2$ 时, 该猜想的证明参见文献 [34, 35], 也可参见文献 [36, 37];
- 特殊情形: 当 $\mathcal{I}(\varphi)$ 平凡时, 这时猜想称为开性猜想, 由 Berndtsson 2013 年解决^[38].
- $n > 2$ 时, 《美国数学评论》MR3418526 指出: 该猜想 “被认为是相当不可及的” (“was thought to be rather inaccessible for $n > 2$ ”).

Demailly 强开性猜想等价于下述两个等价命题:

- ✓ 若 $|f|^2 e^{-\varphi}$ 在原点附近局部可积, 那么存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $|f|^2 e^{-(1+\varepsilon_0)\varphi}$ 也在原点附近局部可积;
- ✓ $\{p \in \mathbb{R} : |f|^2 e^{-p\varphi} \text{ 在原点附近局部可积}\}$ 是开区间.

猜想的一个源泉来自微积分的下述事实:

若 $1/|x|^c = e^{-\varphi}$ 在原点附近局部可积, 则存在某个 $p > 1$, 使得 $1/|x|^{pc} = e^{-p\varphi}$ 也在原点附近局部可积;

$\{p \in \mathbb{R} : f(x)/|x|^{pc} = f(x)e^{-p\varphi} \text{ 在原点附近局部可积}\}$ 是开区间.

定理^[32] Demailly 强开性猜想成立.

也就是说, 乘子理想层具强开性.

关于最优 L^2 延拓问题的研究经历在证明强开性猜想中是有意义的, 这有助于我们在证明中提出对移动复子簇利用 L^2 延拓定理的思想. 以往应用 L^2 延拓定理主要针对固定复子簇.

另外, 如下单复变引理在证明中也起一个关键角色.

引理 设 $f \neq 0$ 是包含原点、半径为 r 的圆盘 $\Delta_r \subset \mathbb{C}$ 上的全纯函数, h_a 是 Δ_r 上的一族全纯函数, 满足: $h_a(o) = 0$ 以及 $h_a(b) = 1$ 对任何 b 满足 $b^k = a$ (k 是给定的正整数), 这里 $a \in \Delta_r$ 具充分小范数, 那么有 $\int_{\Delta_r} |f|^2 |h_a|^2 d\lambda_1 > C_1 |a|^{-2}$, 这里 C_1 是一个不依赖于 a 和 h_a 的正常数.

强开性猜想有许多应用和推论 (参见文献 [39, 40]). 一些立马推论如下:

推论

- Demailly-Ein-Lazarsfeld 猜想的解决:

该猜想也在 Lazarsfeld 的书: *Positivity in Algebraic Geometry, Vol. II* 中列为未解决问题.

该猜想说的是, 对 big 线丛 L , 等式 $\mathcal{I}(\|mL\|) = \mathcal{I}(h_{\min}^m)$ 对任意正整数 m 成立. 这里, $\mathcal{I}(\|L\|)$ 定义为理想族 $\{\mathcal{I}(1/k \cdot |kL|)\}$ (对 k 足够大) 的最大元, 称为渐近乘子理想 (asymptotic multiplier ideal), 而 $h_{\min}$ 由 Demailly 的一个定理给出: 若 L 是一个拟有效线丛 (pseudo-effective line bundle), 则存在唯一的 (等价意义下) 具最小奇性的奇异 Hermite 度量 $h_{\min}$.

- 对拟有效线丛的消没定理 (蕴含上述 Nadel 消没定理).
- 关于多次调和函数奇性的两个不变量乘子理想层与 Lelong 数的两个命题等价的 Boucksom-Farve-Jonsson 猜想^[41] 的解决.

6.3 新近进展

利用乘子理想层的强开性, 孟宪奎和作者^[42] 在不需要 Kähler 流形假定下建立了 Nadel 消没定理; 还获得了取值乘子理想层的消没定理、有限性定理和满性定理, 推广了 Ohsawa 和 Peternell 关于光滑半正度量的相应定理 (参见文献 [43–47]).

朱朗峰和作者^[48] 建立了弱拟凸 Kähler 流形上具奇异度量线丛的最优 L^2 延拓定理, 得到了 Kähler 纤维化 (Kähler fibration) 时扭化相对典则丛 (twisted relative canonical bundles) 的正性.

关于乘子理想层半连续性的萧荫堂引理^[15, 49] 在他解决代数几何问题中起重要作用. 利用我们解决强开性猜想的思想与工作, 朱朗峰和作者^[50] 发现了广义的萧荫堂引理.

基于弱拟凸 Kähler 流形上具奇异度量线丛的最优 L^2 延拓定理、广义的萧荫堂引理和乘子理想层的强开性等, 朱朗峰和作者^[51] 得到了 Kähler 纤维化时扭化相对多典则丛 (twisted relative pluricanonical bundles) 及其直接像 (direct images) 的正性, 该结果在代数纤维空间情形由文献 [52, 53] 获得. 朱朗峰和作者^[51] 还解决了文献 [52, 53] 两次提及的一个猜想.

在文献 [54, 55] 中, 我们结合 L^2 方法, 在几何不变量理论框架下建立了比 Kiselman-Berndtsson (均为瑞典皇家科学院院士) 更广的关于多次调和函数的极小原理. 基于这些工作, 在文献 [56] 中, 我们首次发现了 L^2 延拓定理的逆命题, 用 L^2 延拓性质给出多次调和函数的全新刻画, 获得了 L^2 延拓理论的新认识.

我们建立了最优 L^2 延拓定理, 发现了最优 L^2 延拓定理的几何性质 (在 Ohsawa 书 [8] 中称为 “Guan-Zhou method”), 证明了 Demailly 强开性猜想的工作也在不少杰出数学家如 Ohsawa、Demailly、Berndtsson-Lempert、Păun-Takayama、Păun 和 Hacon-Popa-Schnell^[57] 等关于多复变、代数几何、几何分析的工作中具有重要应用.

参考文献

- 1 Dieudonné J A. The work of Nicholas Bourbaki. Amer Math Monthly, 1970, 77: 134–145
- 2 Grauert H. On Levi’s problem and the imbedding of real-analytic manifolds. Ann of Math (2), 1958, 68: 460–472
- 3 Demailly J P. Complex analytic and differential geometry. <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf>, 2012
- 4 Grauert H, Remmert R. Coherent Analytic Sheaves. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 265. Berlin: Springer-Verlag, 1984
- 5 Grauert H, Remmert R. Theory of Stein Spaces. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 236. Berlin: Springer-Verlag, 1979
- 6 Hörmander L. An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, 3rd ed. North-Holland Mathematical Library 7. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1990

- 7 Kiselman C. Plurisubharmonic Functions and Potential Theory in Several Complex Variables. Basel: Birkhäuser, 2000
- 8 Ohsawa T. L^2 Approaches in Several Complex Variables: Development of Oka-Cartan Theory by L^2 Estimates for the $\bar{\partial}$ Operator. Springer Monographs in Mathematics. Tokyo: Springer, 2015
- 9 Sergeev A G, Zhou X Y. Invariant domains of holomorphy: Twenty years later. Proc Steklov Inst Math, 2014, 285: 241–250
- 10 Vladimirov V S. Methods of the Theory of Functions of Many Complex Variables. Moscow: Nauka, 1964
- 11 Zhou X Y. A proof of the extended future tube conjecture. Izv Math, 1998, 62: 211–224
- 12 Zhou X Y. Some results related to group actions in several complex variables. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol. II. Beijing: Higher Education Press, 2002, 743–754
- 13 Zhou X Y. A survey on L^2 extension problem. In: Complex Geometry and Dynamics. Cham: Springer, 2015, 291–309
- 14 Zhou X Y, Zhu L F. Ohsawa-Takegoshi L^2 extension theorem: Revisited. In: Fifth International Congress of Chinese Mathematicians. Part 1, 2. Providence: Amer Math Soc, 2012, 475–490
- 15 Siu Y T. The Fujita conjecture and the extension theorem of Ohsawa-Takegoshi. In: Geometric Complex Analysis (Hayama, 1995). River Edge: World Scientific, 1996, 577–592
- 16 Siu Y T. Invariance of plurigenera. Invent Math, 1998, 134: 661–673
- 17 Siu Y T. Extension of twisted pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type. In: Complex Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 2002, 223–277
- 18 Siu Y T. Some recent transcendental techniques in algebraic and complex geometry. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol. I. Beijing: Higher Education Press, 2002, 439–448
- 19 Siu Y T. Invariance of plurigenera and torsion-freeness of direct image sheaves of pluricanonical bundles. In: Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications. Advances in Complex Analysis and Its Applications, vol. 2. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004, 45–83
- 20 Siu Y T. Multiplier ideal sheaves in complex and algebraic geometry. Sci China Ser A, 2005, 48: 1–31
- 21 Demailly J P. Kähler manifolds and transcendental techniques in algebraic geometry. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Volume I. Madrid: European Math Soc, 2006, 153–186
- 22 Demailly J P. Analytic Methods in Algebraic Geometry. Beijing: Higher Education Press, 2012
- 23 Ohsawa T, Takegoshi K. On the extension of L^2 holomorphic functions. Math Z, 1987, 195: 197–204
- 24 Ohsawa T. On the extension of L^2 holomorphic functions III: Negligible weights. Math Z, 1995, 219: 215–225
- 25 Ohsawa T. On the extension of L^2 holomorphic functions V: Effects of generalization. Nagoya Math J, 2001, 161: 1–21
- 26 Guan Q A, Zhou X Y. A solution of an L^2 extension problem with an optimal estimate and applications. Ann of Math (2), 2015, 181: 1139–1208
- 27 Guan Q A, Zhou X Y, Zhu L F. On the Ohsawa-Takegoshi L^2 extension theorem and the twisted Bochner-Kodaira identity. C R Math Acad Sci Paris, 2011, 349: 797–800
- 28 Zhu L F, Guan Q A, Zhou X Y. On the Ohsawa-Takegoshi L^2 extension theorem and the Bochner-Kodaira identity with non-smooth twist factor. J Math Pures Appl (9), 2012, 97: 579–601
- 29 Guan Q A, Zhou X Y. Optimal constant problem in the L^2 extension theorem. C R Math Acad Sci Paris, 2012, 350: 753–756
- 30 Guan Q A, Zhou X Y. Optimal constant in an L^2 extension problem and a proof of a conjecture of Ohsawa. Sci China Math, 2015, 58: 35–59
- 31 Guan Q A, Zhou X Y. Strong openness of multiplier ideal sheaves and optimal L^2 extension. Sci China Math, 2017, 60: 967–976
- 32 Guan Q A, Zhou X Y. A proof of Demailly’s strong openness conjecture. Ann of Math (2), 2015, 182: 605–616
- 33 Demailly J P, Kollár J. Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler-Einstein metrics on Fano orbifolds. Ann Sci École Norm Sup (4), 2001, 34: 525–556
- 34 Favre C, Jonsson M. Valutive analysis of planar plurisubharmonic functions. Invent Math, 2005, 162: 271–311
- 35 Favre C, Jonsson M. Valuations and multiplier ideals. J Amer Math Soc, 2005, 18: 655–684
- 36 Jonsson M, Mustață M. An algebraic approach to the openness conjecture of Demailly and Kollár. J Inst Math Jussieu, 2013, 13: 1–26

- 37 Jonsson M, Mustață M. Valuations and asymptotic invariants for sequences of ideals. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 2012, 62: 2145–2209
- 38 Berndtsson B. The openness conjecture and complex Brunn-Minkowski inequalities. In: *Complex Geometry and Dynamics. Abel Symposia*, vol. 10. Cham: Springer, 2015, 29–44
- 39 Guan Q A, Zhou X Y. Effectiveness of Demailly’s strong openness conjecture and related problems. *Invent Math*, 2015, 202: 635–676
- 40 Guan Q A, Zhou X Y. Characterization of multiplier ideal sheaves with weights of Lelong number one. *Adv Math*, 2015, 285: 1688–1705
- 41 Boucksom S, Favre C, Jonsson M. Valuations and plurisubharmonic singularities. *Publ Res Inst Math Sci*, 2008, 44: 449–494
- 42 Meng X K, Zhou X Y. Pseudo-effective line bundles over holomorphically convex manifolds. *J Algebraic Geom*, 2019, 28: 169–200
- 43 Ohsawa T. Finiteness theorems on weakly 1-complete manifolds. *Publ Res Inst Math Sci*, 1979, 15: 853–870
- 44 Ohsawa T. Vanishing theorems on complete Kähler manifolds. *Publ Res Inst Math Sci*, 1984, 20: 21–38
- 45 Peternell T. On strongly pseudo-convex Kähler manifolds. *Invent Math*, 1982, 70: 157–168
- 46 Peternell T. Der Kodairasche Verschwindungssatz auf streng pseudokonvexen Räumen. *I. Math Ann*, 1985, 270: 87–96
- 47 Prill D. The divisor class groups of some rings of holomorphic functions. *Math Z*, 1971, 121: 58–80
- 48 Zhou X Y, Zhu L F. An optimal L^2 extension theorem on weakly pseudoconvex Kähler manifolds. *J Differential Geom*, 2018, 110: 135–186
- 49 Phong D H, Sturm J. Algebraic estimates, stability of local zeta functions, and uniform estimates for distribution functions. *Ann of Math (2)*, 2000, 152: 277–329
- 50 Zhou X Y, Zhu L F. A generalized Siu’s lemma. *Math Res Lett*, 2017, 24: 1897–1913
- 51 Zhou X Y, Zhu L F. Siu’s lemma, optimal L^2 extension, and applications to pluricanonical sheaves. *Math Ann*, in press, 2018
- 52 Berndtsson B, Păun M. Bergman kernels and the pseudoeffectivity of relative canonical bundles. *Duke Math J*, 2008, 145: 341–378
- 53 Păun M, Takayama S. Positivity of twisted relative pluricanonical bundles and their direct images. *J Algebraic Geom*, 2018, 27: 211–272
- 54 Deng F, Zhang H, Zhou X. Positivity of direct images of positively curved volume forms. *Math Z*, 2014, 278: 347–362
- 55 Deng F, Zhang H, Zhou X. Positivity of character subbundles and minimum principle for noncompact group actions. *Math Z*, 2017, 286: 431–442
- 56 Deng F S, Wang Z W, Zhang L Y, Zhou X Y. New characterizations of plurisubharmonic functions and positivity of direct image sheaves. *ArXiv:1809.10371*, 2018
- 57 Hacon C D, Popa M, Schnell C. Algebraic fiber spaces over abelian varieties: Around a recent theorem by Cao and Păun. In: *Local and Global Methods in Algebraic Geometry*, vol. 712. Providence: Amer Math Soc, 2018, 143–195

A brief introduction of several complex variables

Xiangyu Zhou

Abstract In this paper, we give a brief introduction of several complex variables around analytic continuation, including some basic ideas, methods and recent progress, emphasizing the relation with one complex variable.

Keywords analytic continuation, plurisubharmonic function, multiplier ideal sheaf, L^2 extension, domain of holomorphy

MSC(2010) 32D05, 32D15, 32U05, 14C30, 32T05, 32Q28

doi: 10.1360/SSM-2019-0196