捕获分支是拟圆: 具有临界不动点的三次多项式

献给杨乐教授 80 华诞

王悦洋, 邱维元*

复旦大学数学科学学院, 上海 200433

E-mail: yueyangwang@icloud.com, wyqiu@fudan.edu.cn

收稿日期: 2018-09-25; 接受日期: 2019-02-19; 网络出版日期: 2019-05-17; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11671091 和 11731003) 资助项目

摘要 按 Milnor 分类, 具有有限临界不动点的三次多项式的参数平面中, 有界双曲分支可以分为三类: 主双曲分支、捕获分支、非捕获分支. Roesch 证明了主双曲分支边界具有稠密尖点, 本文证明捕获分支的边界是拟圆周, 从而没有尖点. 同时, 非捕获分支的边界是一条解析曲线 (至多有一个例外的尖点).

关键词 三次多项式 双曲分支 捕获分支 拟圆周 尖点 全纯运动

MSC (2010) 主题分类 37F45, 37F10

1 引言

Branner 和 Hubbard^[1] 首先研究了复三次多项式 $z \mapsto z^3 + az + b$ ($a, b \in \mathbb{C}$) 的参数空间 $\mathcal{S}$. 他们证明了其连通轨迹 (具有连通 Julia 集的参数集) 是 $\mathcal{S}$ 中的单连通紧集. Petersen 和 Tan^[2] 对 $\mathcal{S}$ 中主双曲分支的拓扑进行了刻画. 然而, 由于 $\mathcal{S}$ 的参数空间是复 2 维 (实 4 维) 的, 其连通轨迹和双曲分支的边界通常是复杂的分形, 很难给出一个比较清晰的直观描述, 因此, Milnor^[3] 建议研究 $\mathcal{S}$ 中的复一维截面 $\mathcal{S}_p$, 其中 $\mathcal{S}_p$ 是具有周期为 p 的周期临界点的三次多项式全体. 其中最简单的是 $\mathcal{S}_1$, 即有一个有限临界不动点的三次多项式全体. $\mathcal{S}_1$ 中的三次多项式都可以写成如下形式:

$$f_a(z) = z^3 - 3a^2z + 2a^3 + a, \quad a \in \mathbb{C},$$

其中参数 a 即为 f_a 的临界不动点. 因此, 我们可以将 $\mathcal{S}_1$ 用复平面 $\mathbb{C}$ 参数化. 以后, 我们将 $\mathcal{S}_1$ 等同于其参数平面 $\mathbb{C}$.

Faught^[4] 讨论了 $\mathcal{S}_1$ 的连通轨迹和双曲分支的拓扑性质. Roesch^[5] 对此进行了更细致和更为严格的研究, 并将其推广到一类较广的函数族: 具有最高阶临界不动点的多项式函数族, 即临界不动点

英文引用格式: Wang Y Y, Qiu W Y. Capture components are quasidisks: Cubic polynomials with a critical fixed point (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1431–1438, doi: 10.1360/N012018-00235

的阶等于多项式次数减 1, $\mathcal{S}_1$ 是临界不动点阶为 2 的特殊情形. 已知 $\mathcal{S}_1$ 中的连通轨迹 $\mathcal{C}_1$ 是参数平面 $\mathbb{C}$ 中的单连通紧集, 其余集是唯一的无界双曲分支, 而包含在连通轨迹 $\mathcal{C}_1$ 中的双曲分支都是有界单连通区域. Faught^[4] 和 Roesch^[5] 进一步证明了包含在连通轨迹 $\mathcal{C}_1$ 内的双曲分支的边界是 Jordan 曲线, 并且, 如果二次多项式的 Mandelbrot 集是局部连通的, 则 $\mathcal{S}_1$ 的连通轨迹 $\mathcal{C}_1$ 也是局部连通的.

上述已有性质均是拓扑性质, 本文将关注的是包含在 $\mathcal{S}_1$ 的连通轨迹中的有界双曲分支边界的几何性质. 注意到, $\mathcal{S}_1$ 中的每个多项式 $f_a \in \mathcal{S}_1$ 有两个临界点 $\pm a$, 其中 a 是超吸引不动点, 而 $-a$ 的轨道有各种不同的状态, 称为自由临界点. 按照 Milnor^[3] 的分类, 连通轨迹 $\mathcal{C}_1$ 中的双曲分支可以分为以下三类:

- (1) 主双曲分支: 自由临界点 $-a$ 位于超吸引不动点 a 的直接吸引域内;
- (2) 捕获分支: 自由临界点 $-a$ 位于超吸引不动点 a 的吸引域内, 但不在 a 的直接吸引域内;
- (3) 非捕获分支: 自由临界点 $-a$ 不在超吸引不动点 a 的吸引域内.

主双曲分支只有一个, 即包含参数 $a = 0$ 的双曲分支, 记主双曲分支为 $\mathcal{H}_0$. Roesch^[5] 详细研究了 $\mathcal{H}_0$ 的边界, 证明在 $\partial\mathcal{H}_0$ 上有可数多个抛物参数, 这些抛物参数在 $\partial\mathcal{H}_0$ 上是稠密的, 并且每个抛物参数同时位于某个 Mandelbrot 集拟共形同胚象 (小 Mandelbrot 集) 的尖点处. 从而, $\mathcal{H}_0$ 的边界是一条具有稠密尖点的 Jordan 曲线.

一个自然的问题是, 除了主双曲分支, 捕获分支和非捕获分支的边界是怎样的一条曲线, 是否有尖点? 本文将回答这个问题, 证明: 捕获分支的边界没有尖点, 它是一个拟圆周. 而非捕获分支的边界是光滑曲线, 至多有一个例外的尖点.

定理 1.1 在 $\mathcal{S}_1$ 的参数平面中, 每个捕获分支的边界都是拟圆周.

定理 1.2 在 $\mathcal{S}_1$ 的参数平面中, 非捕获分支的边界是一条除了在乘子为 1 的抛物参数处可能有一个尖点外的解析曲线.

定理 1.2 的证明类似于 Mandelbrot 集内双曲分支. 事实上, 非捕获分支内的多项式是可重整的, 每个非捕获分支包含在某个小 Mandelbrot 集内. 本文主要工作是证明定理 1.1, 证明将在第 3 节中给出.

图 1 显示了 $\mathcal{S}_1$ 中连通轨迹 $\mathcal{C}_1$ 、 $\mathcal{C}_1$ 中主双曲分支 $\mathcal{H}_0$ (图 1(a))、捕获分支 $\mathcal{V}$ (图 1(b)) 和非捕获分支 $\mathcal{N}$ (图 1(c)). 图中所显示的捕获分支的边界都是拟圆周.

图 1 $\mathcal{S}_1$ 中连通轨迹 $\mathcal{C}_1$, 主双曲分支 $\mathcal{H}_0$ (a) 和捕获分支 $\mathcal{V}$ (b) 以及非捕获分支 $\mathcal{N}$ (c)

2 定义和准备知识

首先介绍有关定义和准备知识, 细节可参见文献 [3–5]. 已知 $\mathcal{S}_1$ 中多项式可参数化表示为

$$f_a(z) = z^3 - 3a^2z + 2a^3 + a, \quad a \in \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

f_a 有两个有限临界点 $\pm a$, 其中 a 是 f_a 的超吸引不动点, $-a$ 有不同的轨道状态, 称为自由临界点. 记 f_a^m 是 f_a 的 m 次迭代, 定义

$$\mathcal{H} = \left\{ a \in \mathbb{C} : \lim_{m \rightarrow \infty} f_a^m(-a) = a \right\},$$

那么, $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}_1$ 是开集, $\mathcal{H}$ 的每个连通分支是 $\mathcal{S}_1$ 的双曲分支. 称 $\mathcal{H}$ 中包含 0 的连通分支为主双曲分支, 记为 $\mathcal{H}_0$. $\mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_0$ 中的每个连通分支称为捕获分支. $\mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{H}$ 中的每个双曲分支称为非捕获分支.

记 a 的直接吸引域为 U_a , 则 $a \in \mathcal{H}_0$ 当且仅当 $-a \in U_a$; $a \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_0$ 当且仅当 $-a \notin U_a$ 但存在正整数 $m \geq 1$ 使得 $f_a^m(-a) \in U_a$. 如果 a 属于某个非捕获分支, 则对任意 $m \geq 0$, 都有

$$f_a^m(-a) \notin U_a.$$

已知 U_a 是有界单连通区域, Faught [4] 进一步证明下面的引理:

引理 2.1 对任意 $a \in \mathbb{C}$, ∂U_a 是 Jordan 曲线.

如果 $a \in \mathcal{H}$, 那么, f_a 是双曲的, 由文献 [6] 的结论知下面的引理:

引理 2.2 如果 $a \in \mathcal{H}$, 则 ∂U_a 是拟圆周.

注 2.1 引理 2.1 对任意次数大于等于 2 的多项式的吸引或抛物 Fatou 分支都成立, 引理 2.2 对临界非回归多项式的吸引或抛物 Fatou 分支 (抛物分支时, 乘子为 1 的分支除外) 成立, 参见文献 [7].

在超吸引不动点 a 的邻域内, 有 Böttcher 坐标 $\beta_a(z)$ 满足

$$\beta_a \circ f_a(z) = (\beta_a(z))^2, \quad \beta_a(a) = 0.$$

如果 $a \in \mathcal{H}_0$, 那么, β_a 可以扩充到包含 a 的某个闭拓扑圆, 使得 $-a$ 在其边界上, 且 β_a 在其上是同胚, 在其内部是共形的. 这样, $\beta_a(-a)$ 是良定义的. 记 $\eta(a) = \beta_a(-a)$, $a \in \mathcal{H}_0$, 记 $\mathbb{D}$ 为单位圆, 则有如下引理 (证明参见文献 [3]).

引理 2.3 映射 $\eta: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathbb{D}$, $\eta(a) = \beta_a(-a)$, 是一个两层全纯分支覆盖, 其唯一的分支点为 0.

由此, $\mathcal{H}_0$ 是单连通的, 并可在 $\mathcal{H}_0$ 上引入参数内射线: 对 $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, 以角度为 t 的参数内射线定义为

$$\mathcal{R}_{\mathcal{H}_0}^t = \{\eta^{-1}(re^{i2\pi t}) : r \in [0, 1)\}.$$

如果 $a \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_0$, 则临界点 $-a \notin U_a$. Böttcher 坐标 β_a 可以扩充到整个 U_a 上, 使得 $\beta_a: U_a \rightarrow \mathbb{D}$ 为共形映射. 由引理 2.1, β_a 可以扩充为 $\bar{U}_a$ 到 $\mathbb{D}$ 的同胚, 且仍满足

$$\beta_a \circ f_a(z) = (\beta_a(z))^2.$$

设 $\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_0$ 是一个捕获分支. 按定义, 对每个 $a \in \mathcal{V}$, 存在一个最小的正整数 $m = m(a)$ 使得 $f_a^m(-a) \in U_a$, 即

$$m(a) = \min\{m \in \mathbb{N} : f_a^m(-a) \in U_a\}, \quad a \in \mathcal{V}.$$

利用当 a 在双曲分支内时, ∂U_a 连续依赖于参数 a (在 Hausdorff 拓扑下, 参见文献 [8]), 容易得到, 如果对某个 $a_0 \in \mathcal{V}$, 有 $f_{a_0}^m(-a_0) \in U_{a_0}$, 但 $f_{a_0}^{m-1}(-a_0) \notin U_{a_0}$, 那么, 存在 a_0 的某个邻域 $\mathcal{N}_\varepsilon$, 使得当 $a \in \mathcal{N}_\varepsilon$ 时, 仍然有

$$f_a^m(-a) \in U_a, \quad f_a^{m-1}(-a) \notin U_a.$$

因此, $m = m(a)$ 局部是常数. 由 $\mathcal{V}$ 的连通性, 有下面的引理:

引理 2.4 $m = m(a)$ 在 $\mathcal{V}$ 上是常数.

称上述 $m \in \mathbb{N}$ 为捕获分支 $\mathcal{V}$ 的阶. 下面的引理给出了 $\mathcal{V}$ 上的 Riemann 映射 (证明参见文献 [5, 引理 2.8]).

引理 2.5 设 $\mathcal{V}$ 是 m 阶捕获分支, 则

$$\phi: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{D}, \quad \phi(a) = \beta_a \circ f_a^m(-a) \quad (2.2)$$

是一个共形映射.

注 2.2 在 Roesch 的论文中, f_a 的参数化稍有不同, 她将临界不动点规范化为 0 而不是 a , 下同.

推论 2.1 对给定 $m \in \mathbb{N}$, 仅有有限多个 m 阶捕获分支.

证明 由引理 2.5 知, $\phi: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{D}$ 是共形映射, 因此, $a = \phi^{-1}(0) \in \mathcal{V}$, 且 $\beta_a \circ f_a^m(-a) = \phi(a) = 0$. 又当 a 在捕获分支 $\mathcal{V}$ 内时, Böttcher 映射 $\beta_a: U_a \rightarrow \mathbb{D}$ 也是共形映射, 且 $\beta_a(a) = 0$, 因此, $f_a^m(-a) = a$, 即 $a = \phi^{-1}(0) \in \mathcal{V}$ 是这个代数方程的一个根. 从而捕获分支的个数不超过方程 $f_a^m(-a) = a$ 根的个数, 因而是有限的. $\square$

下面的结论是我们要用到的关键结论之一 (参见文献 [5, 引理 1]).

引理 2.6 $\mathcal{H}$ 中任意两个双曲分支的闭包是互不相交的.

定理 2.1 [4, 5] $\mathcal{H}$ 中的每个双曲分支的边界都是 Jordan 曲线.

上面两个结论表明, 主双曲分支 $\mathcal{H}_0$ 和任意捕获分支 $\mathcal{V}$ 都是 Jordan 区域, 且 $\overline{\mathcal{H}_0} \cap \overline{\mathcal{V}} = \emptyset$. 对任意两个互不相同的捕获分支 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$, 有 $\overline{\mathcal{V}_1} \cap \overline{\mathcal{V}_2} = \emptyset$.

3 定理的证明

定理 1.1 的证明的主要工具是全纯运动和 λ -引理. 设 $\mathcal{W}$ 是单连通区域, $A \subset \mathbb{C}$ 是复平面上子集, $w_0 \in \mathcal{W}$. 映射 $h: \mathcal{W} \times A \rightarrow \mathbb{C}$ 满足如下条件:

- (1) $h_{w_0}(z) := h(w_0, z)$ 是恒等映射;
- (2) 对给定 $w \in \mathcal{W}$, $h_w(z) := h(w, z)$ 是 A 上单射;
- (3) 对给定 $z \in A$, 映射 $w \mapsto h(w, z)$ 是 $\mathcal{W}$ 上全纯函数,

那么, 称 h 是 $\mathcal{W} \times A$ 上以 w_0 为基点的全纯运动.

定理 3.1 (λ -引理 [8-10]) 设 $\mathcal{W}$ 是单连通双曲区域, $A \subset \mathbb{C}$, $w_0 \in \mathcal{W}$. $h: \mathcal{W} \times A \rightarrow \mathbb{C}$ 是以 w_0 为基点的全纯运动, 那么, h 可以扩充为 $\mathcal{W} \times \mathbb{C}$ 上全纯运动 $\bar{h}: \mathcal{W} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. 进一步, 对给定 $w \in \mathcal{W}$, 映射 $h_w: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h_w(z) = h(w, z)$, 是一个拟共形同胚, 其 Beltrami 系数 $\mu_w(z) = \bar{\partial}h_w(z)/\partial h_w(z)$ 满足

$$\|\mu_w\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{z \in \mathbb{C}} |\mu_w(z)| \leq \frac{e^{\rho(w, w_0)} - 1}{e^{\rho(w, w_0)} + 1} < 1, \quad (3.1)$$

其中 $\rho(w, w_0)$ 是 $\mathcal{W}$ 上 w 和 w_0 之间的双曲距离.

引理 3.1 设 $\mathcal{W} \subset \mathbb{C}$ 是单连通区域, 满足 $\overline{\mathcal{W}} \cap \overline{\mathcal{H}}_0 = \emptyset$. 给定 $a_0 \in \mathcal{W}$. 那么存在 $\mathcal{W} \times \overline{U}_{a_0}$ 上以 a_0 为基点的全纯运动 $h: \mathcal{W} \times \overline{U}_{a_0} \rightarrow \mathbb{C}$.

证明 由于 $\mathcal{W} \cap \overline{\mathcal{H}}_0 = \emptyset$, 对任意 $a \in \mathcal{W}$, U_a 上的 Böttcher 坐标 β_a 可以扩充为 $\overline{U}_a$ 到 $\mathbb{D}$ 的同胚. 令

$$h_a(z) = \beta_a^{-1} \circ \beta_{a_0}(z), \quad z \in \overline{U}_{a_0}, \quad (3.2)$$

则 $h_a(z)$ 是良定义的, 且 $h_a: \overline{U}_{a_0} \rightarrow \overline{U}_a$ 是同胚, 因而是单射. 又已知 β_a 全纯依赖于参数 a , 因而, $h_a(z)$ 关于参数 $a \in \mathcal{W}$ 全纯. 显然, $h_{a_0}(z) \equiv z$ 是恒等映射. 因此, $h: \mathcal{W} \times \overline{U}_{a_0} \rightarrow \mathbb{C}$, $h(a, z) = h_a(z)$, 是全纯运动. $\square$

现设 $\mathcal{V}$ 是一个阶为 m 的捕获分支.

引理 3.2 存在 Jordan 区域 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{W}$ 满足 $\overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{U}$, $\overline{\mathcal{U}} \subset \mathcal{W}$, 使得

$$\overline{\mathcal{W}} \cap \overline{\mathcal{H}}_0 = \emptyset,$$

且对任意阶不超过 m 的捕获分支 $\mathcal{V}'$, 若 $\mathcal{V}' \neq \mathcal{V}$, 则有 $\overline{\mathcal{W}} \cap \overline{\mathcal{V}'} = \emptyset$. 进一步, 对 $a_0 = \phi^{-1}(0) \in \mathcal{V}$, 由引理 3.1 定义的全纯运动 $h: \mathcal{W} \times \overline{U}_{a_0} \rightarrow \mathbb{C}$ 可以扩充为 $\mathcal{W} \times \mathbb{C}$ 上的全纯运动, 且存在 $0 < k < 1$ 使得对任意 $a \in \overline{\mathcal{U}}$, $h_a(z) = h(a, z)$ 的 Beltrami 系数满足

$$\|\mu_a\|_\infty \leq k < 1. \quad (3.3)$$

证明 由定理 2.1 知, $\overline{\mathcal{V}}$ 是闭 Jordan 区域. 再由引理 2.6, 可取到 Jordan 区域 $\mathcal{W}$ 使得 $\overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{W}$, 且 $\overline{\mathcal{W}} \cap \overline{\mathcal{H}}_0 = \emptyset$. 又由推论 2.1 知, 阶不超过 m 的捕获分支只有有限多个, 故结合引理 2.6, 适当缩小 $\mathcal{W}$, 可使得对任意阶不超过 m 且不为 $\mathcal{V}$ 本身的捕获分支 $\mathcal{V}'$ 都有 $\overline{\mathcal{W}} \cap \overline{\mathcal{V}'} = \emptyset$. 进一步取 Jordan 区域 $\mathcal{U}$, 使得 $\overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{U}$, $\overline{\mathcal{U}} \subset \mathcal{W}$.

现设 $h: \mathcal{W} \times \overline{U}_{a_0} \rightarrow \mathbb{C}$ 是引理 3.1 中定义的全纯运动, 根据定理 3.1, h 可以扩充为 $\mathcal{W} \times \mathbb{C}$ 上的全纯运动, 使得 $h_a(z) = h(a, z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上拟共形映射. 由于 $\overline{\mathcal{U}} \subset \mathcal{W}$, 则存在 $R > 0$ 使得对任意 $a \in \overline{\mathcal{U}}$, 有 $0 \leq \rho(a, a_0) \leq R$, 其中 $\rho(a, a_0)$ 是 $\mathcal{W}$ 上的双曲距离. 由 (3.1), 取 $k = (e^R - 1)/(e^R + 1)$, 则对任意 $a \in \overline{\mathcal{U}}$, h_a 的 Beltrami 系数 $\mu_a(z)$ 满足 (3.3). $\square$

现在, 我们通过 h_a 建立参数平面到 f_{a_0} 的动力学平面之间的映射. 定义映射

$$H: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}, \quad H(a) = h_a^{-1} \circ f_a^m(-a). \quad (3.4)$$

注意到 h_a 已经扩充为 $\mathbb{C}$ 上拟共形映射, 上述映射 H 是良定义的.

引理 3.3 映射 H 是 $\mathcal{U}$ 上拟正则映射.

证明 只需证明存在常数 $k \in [0, 1)$ 使得

$$\left\| \frac{\partial H / \partial \bar{a}}{\partial H / \partial a} \right\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{a \in \mathcal{U}} \left| \frac{\partial H / \partial \bar{a}}{\partial H / \partial a} \right| \leq k < 1,$$

其中 $\partial H / \partial a$ 和 $\partial H / \partial \bar{a}$ 是局部 L^2 可积的广义导数.

为此, 考虑方程 $h_a \circ H(a) = f_a^m(-a)$ 关于 a 和 $\bar{a}$ 的广义偏导数. 由于 h_a 和 $f_a^m(-a)$ 都是关于 a 的全纯函数, 故

$$\frac{\partial h_a}{\partial \bar{a}} = \frac{\partial f_a^m(-a)}{\partial \bar{a}} = 0,$$

我们得到

$$\frac{\partial h_a}{\partial z} \Big|_{H(a)} \frac{\partial H}{\partial \bar{a}} \Big|_a + \frac{\partial h_a}{\partial \bar{z}} \Big|_{H(a)} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{a}} \Big|_a = 0.$$

于是,

$$\left| \frac{\partial H / \partial \bar{a}}{\partial H / \partial a} \Big|_a \right| = \left| \frac{\partial H / \partial \bar{a}}{\partial \bar{H} / \partial \bar{a}} \Big|_a \right| = \left| \frac{\partial h_a / \partial \bar{z}}{\partial h_a / \partial z} \Big|_{H(a)} \right| = |\mu_a(H(a))|.$$

由引理 3.2 知, 存在 $0 \leq k < 1$ 使得对任意 $a \in \bar{\mathcal{U}}$, 有

$$\|\mu_a\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{z \in \mathbb{C}} |\mu_a(z)| \leq k.$$

因此,

$$\left\| \frac{\partial H / \partial \bar{a}}{\partial H / \partial a} \right\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{a \in \mathcal{U}} \left| \frac{\partial H / \partial \bar{a}}{\partial H / \partial a} \right| = \operatorname{ess\,sup}_{a \in \mathcal{U}} |\mu_a(H(a))| \leq k < 1.$$

设 $\mu^* = (\partial H / \partial \bar{a}) / (\partial H / \partial a)$. 由 Ahlfors-Bers 可测 Riemann 映射定理^[11]可知, 存在拟共形映射 $g: \mathcal{U} \rightarrow g(\mathcal{U})$ 满足 $\partial g / \partial \bar{a} = \mu^* \partial g / \partial a$. 那么, $H_1 = H \circ g^{-1}$ 是全纯映射, 因此, $H = H_1 \circ g$ 是拟正则映射. $\square$

定理 1.1 的证明 (1) 由定义 (3.4) 以及 (2.2) 和 (3.2) 知, 当 $a \in \mathcal{V}$ 时,

$$H(a) = h_a^{-1} \circ f_a^m(-a) = \beta_{a_0}^{-1} \circ \beta_a \circ f_a^m(-a) = \beta_{a_0}^{-1} \circ \phi(a).$$

已知 Böttcher 坐标 β_a 是 U_a 到 $\mathbb{D}$ 的共形映射, 而由引理 2.5 知, ϕ 是 $\mathcal{V}$ 到 $\mathbb{D}$ 的共形映射, 因此, 限制在 $\mathcal{V}$ 上, H 是 $\mathcal{V}$ 到 U_{a_0} 的共形映射. 又由于 $\partial \mathcal{V}$ 和 ∂U_{a_0} 都是 Jordan 曲线 (见引理 2.1 和定理 2.1), 因此, 由共形映射的边界对应可得 H 是 $\bar{\mathcal{V}}$ 到 $\bar{U}_{a_0}$ 的同胚, $H(\partial \mathcal{V}) = \partial U_{a_0}$.

(2) 我们证明 $H^{-1}(\bar{U}_{a_0}) = \bar{\mathcal{V}}$, 即如果 $a \in \mathcal{W}$, 且 $H(a) \in \bar{U}_{a_0}$, 则必有 $a \in \bar{\mathcal{V}}$. 先证当 $H(a) \in U_{a_0}$ 时, $a \in \mathcal{V}$. 由于 $H(a) = h_a^{-1} \circ f_a^m(-a)$, 而 h_a 是 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 的同胚, 且 $h_a(U_a) = U_{a_0}$, 可知 $f_a^m(-a) \in U_a$. 若 $a \notin \mathcal{V}$, 存在最小的整数 n 满足 $0 \leq n \leq m$ 使得 $f_a^n(-a) \in U_a$, 即 $a \in \mathcal{H}_0$ ($n=0$) 或 a 属于某个阶为 n 的捕获分支 $\mathcal{V}'$, $\mathcal{V}' \neq \mathcal{V}$. 但由引理 3.2, 有

$$\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{W} = \emptyset, \quad \mathcal{V}' \cap \mathcal{W} = \emptyset,$$

矛盾. 因此, $a \in \mathcal{V}$ 得证. 现设 $H(a) \in \partial U_{a_0}$. 由于 H 是拟正则的 (见引理 3.3), 且不为常值, 故 H 是一个开映射, H 将 a 的邻域映成 $H(a) \in \partial U_{a_0}$ 的某个邻域. 因此, 对 a 的任意充分小邻域 $N(a)$, 存在 $b, b' \in N(a)$ 使得 $H(b) \in U_{a_0}$, $H(b') \notin U_{a_0}$. 由前面的讨论即得 $b \in \mathcal{V}$, $b' \notin \mathcal{V}$. 因此, $a \in \partial \mathcal{V}$.

(3) 我们证明: 存在 $\bar{\mathcal{V}}$ 的某个邻域 $\mathcal{U}'$, 使得 H 限制在 $\mathcal{U}'$ 上是拟共形映射. 令 $\mathcal{U}$ 是引理 3.2 中所取区域, 满足 $\bar{\mathcal{V}} \subset \mathcal{U}$, $\bar{\mathcal{U}} \subset \mathcal{W}$. 记 $\gamma = \partial \mathcal{U}$, 则 γ 是一条 Jordan 曲线, $\gamma \cap \bar{\mathcal{V}} = \emptyset$. 令 $\Gamma = H(\gamma)$, 则由 (2), 可得

$$\Gamma \cap \bar{U}_{a_0} = \emptyset.$$

记 U' 是 $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ 包含 $\bar{U}_{a_0}$ 的连通分支. 由于 H 是拟正则映射, 为一个全纯映射和一个拟共形映射的复合, 因此, 辐角原理仍然成立. 由第一部分讨论, 对 $w \in U_{a_0}$, 有唯一的值 $a \in \mathcal{U}$ 使得 $a = H^{-1}(w)$. 由辐角原理, 这意味着 Γ 关于 w 的绕数等于 1. 从而, 对任意 $w \in U'$, Γ 关于 w 的绕数等于 1. 因此, 再由辐角原理, $H^{-1}(w)$ 在 $\mathcal{U}$ 有唯一的值. 令 $\mathcal{U}'$ 是 $H^{-1}(U')$ 包含 $\bar{\mathcal{V}}$ 的连通分支, 则 $H: \mathcal{U}' \rightarrow U'$ 是同胚, 从而是拟共形映射.

由于已知 ∂U_{a_0} 是拟圆周 (引理 2.2), 因此, $\partial \mathcal{V} = H^{-1}(\partial U_{a_0})$ 是拟圆周. $\square$

定理 1.2 的证明 定理的证明类似于二次多项式 Mandelbrot 集内的双曲分支 (参见文献 [12]). 设 $\mathcal{N}$ 是一个非捕获分支, 那么, 对任意 $a \in \mathcal{N}$, f_a 的临界点 $-a$ 不属于临界不动点 a 的吸引域. 因此, 必定被一个不同于临界不动点 a 的吸引周期轨道所吸引, 设这个吸引周期轨道为

$$\mathcal{O}(a) = \{z_0(a), z_1(a), \dots, z_{p(a)-1}(a)\},$$

周期为 $p = p(a)$, 乘子为 $\lambda(a) = (f_a^p)'(z_0(a))$, 满足 $|\lambda(a)| < 1$. 由于除 a 外, f_a 只有唯一的临界点 $-a$, 而每个吸引周期轨道至少吸引一个临界点, 因此, 吸引周期轨道 $\mathcal{O}(a)$ 是唯一的. 由隐函数定理知, 每个周期点 $z_j(a) \in \mathcal{O}(a)$ 可以延拓为 $\mathcal{N}$ 上的全纯函数, 并且 $z_j(a) \neq z_k(a)$, $k \neq j$, $k, j = 0, 1, \dots, p(a) - 1$. 否则, $z_j(a)$ 将是 $f_a^p(z) = z$ 的重根, 必有

$$(f_a^p)'(z_j(a)) = 1,$$

与 $|\lambda(a)| < 1$ 矛盾. 这意味着 $p = p(a)$ 在 $\mathcal{N}$ 上是常数, 从而乘子 $\lambda(a)$ 是 $\mathcal{N}$ 上全纯函数. 由于当 $a \in \partial\mathcal{N}$ 时, f_a 非双曲, 故当 $a \rightarrow \partial\mathcal{N}$ 时,

$$|\lambda(a)| \rightarrow 1.$$

因此,

$$\lambda: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{D}, \quad \lambda(a) = (f_a^p)'(z_0(a))$$

是逆紧映射, 从而是全纯分支覆盖映射. 利用拟共形手术和 Ahlfors-Bers 可测 Riemann 映射定理, 可得 λ 是局部可逆的 (细节参见文献 [12]), 因而是一个全纯覆盖映射. 再由 $\mathbb{D}$ 是单连通的, 得到 λ 是共形映射. 故当 $a \in \mathcal{N} \rightarrow \alpha \in \partial\mathcal{N}$ 时, 有

$$|\lambda(a)| \rightarrow 1.$$

由于周期点 $z_0(a)$ 事实上可以解析延拓到 $\partial\mathcal{N}$, 只要 $\lambda(a) \neq 1$. 而对应于 $\lambda(a) = 1$ 的点是 $z_0(a)$ 的一个代数奇点. 从而, $\lambda(a)$ 也可解析延拓到 $\partial\mathcal{N}$, 除了 $\lambda(a) = 1$ 时有代数奇点. 因此, $\partial\mathcal{N}$ 是由 $|\lambda(a)| = 1$ 所确定的, 除了 $\lambda(a) = 1$ 处可能例外的解析曲线. 而 $\lambda(a) = 1$ 对应于 $\partial\mathcal{N}$ 上的唯一边界点 (由 Carathéodory 边界对应定理, 当 $z \rightarrow 1$ 时, $\lambda^{-1}(z) \rightarrow a \in \partial\mathcal{N}$ 极限存在且唯一). 因此, $\partial\mathcal{N}$ 是一条解析曲线, 至多有一个对应于 $\lambda(a) = 1$ 的例外点, 这是一个抛物参数, 也是唯一可能的尖点. $\square$

参考文献

- 1 Branner B, Hubbard J H. The iteration of cubic polynomials. Part I: The global topology of parameter space. *Acta Math*, 1988, 160: 143–206
- 2 Petersen C L, Tan L. Analytic coordinates recording cubic dynamics. In: *Complex Dynamics: Families and Friends*. Wellesley: A K Peters, 2009, 413–449
- 3 Milnor J. Cubic polynomial maps with periodic critical orbit: Part I. In: *Complex Dynamics Families and Friends*. Wellesley: A K Peters, 2009, 333–411
- 4 Faught D. Local connectivity in a family of cubic polynomials. PhD Thesis. Ithaca: Cornell University, 1992
- 5 Roesch P. Hyperbolic components of polynomials with a fixed critical point of maximal order. *Ann Sci École Norm Sup* (4), 2007, 40: 901–949
- 6 Carleson L, Jones P W, Yoccoz J C. Julia and John. *Bol Soc Bras Mat*, 1994, 25: 1–30
- 7 Roesch P, Yin Y. The boundary of bounded polynomial Fatou components. *Comptes Rendus Math*, 2008, 346: 877–880
- 8 Mañé R, Sad P, Sullivan D. On the dynamics of rational maps. *Ann Sci École Norm Sup* (4), 1983, 16: 193–217
- 9 Bers L, Royden H L. Holomorphic families of injections. *Acta Math*, 1986, 157: 259–286
- 10 Ślodkowski Z. Holomorphic motions and polynomial hulls. *Proc Amer Math Soc*, 1991, 111: 347–355

- 11 Ahlfors L, Bers L. Riemann's mapping theorem for variable metrics. *Ann of Math* (2), 1960, 72: 385–404
- 12 Carleson L, Gamelin T W. *Complex Dynamics*. New York: Springer, 1993

Capture components are quasidisks: Cubic polynomials with a critical fixed point

Yueyang Wang & Weiyuan Qiu

Abstract According to the classification by Milnor, the hyperbolic components in the parameter plane of the cubic polynomials with a critical fixed point can be classified into three types: The principal hyperbolic component, the capture components, and the non-capture components. Roesch proved that cusps are dense on the boundary of the principal hyperbolic component. In this paper, we prove that the boundary of every capture component is a quasi-circle, which implies there are no cusps on it, while the boundary of a non-capture component is a smooth Jordan curve (except at most one cusp at the parabolic parameter).

Keywords cubic polynomial, hyperbolic component, capture component, quasi-circle, cusps, holomorphic motion

MSC(2010) 37F45, 37F10

doi: 10.1360/N012018-00235