非线性空间分数阶 Ginzburg-Landau 方程的 隐显型差分格式

王鹏德¹, 黄乘明^{2,3*}

1. 河南财经政法大学数学与信息科学学院, 郑州 450046;

2. 华中科技大学数学与统计学院, 武汉 430074;

3. 华中科技大学工程建模与科学计算湖北省重点实验室, 武汉 430074

E-mail: pengde.wang@yeah.net, chengming.huang@hotmail.com

收稿日期: 2018-06-21; 接受日期: 2019-07-08; 网络出版日期: 2019-08-27; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11771163 和 11801140) 和中国博士后科学基金 (批准号: 2017M620591) 资助项目

摘要 本文对带 Riesz 分数阶导数的非线性空间分数阶 Ginzburg-Landau 方程引入一类二阶带权隐显型差分格式. 该类格式在时间上对方程中的线性项采用隐式离散并对非线性项采用显式离散, 同时在空间上采用四阶拟紧差分格式逼近 Riesz 分数阶导数. 通过引入并调节权因子 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$, 可获得不同的隐显型格式, 该类格式在每一时间步仅需求解一个系数矩阵与时间层无关的线性方程组. 本文利用离散能量方法和 G 稳定性思想证明格式在 l_h^2 范数、 $H_h^{\alpha/2}$ 半范数和 l_h^∞ 范数意义下的无条件收敛性, 且该证明对所有 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ 一致成立. 最后在数值测试中验证格式的数值精度, 并比较当 θ 取不同值时所得格式在有限时间和长时间数值仿真中的有效性.

关键词 空间分数阶 Ginzburg-Landau 方程 Riesz 分数阶导数 隐显型方法 紧差分格式 逐点误差估计

MSC (2010) 主题分类 35R11, 65M06, 65M12, 65M15

1 引言

本文研究下列带 Riesz 空间分数阶导数的分数阶 Ginzburg-Landau 方程 (fractional Ginzburg-Landau equation, FGLE) ($1 < \alpha \leq 2$):

$$u_t + (v + i\eta)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u + (\kappa + i\zeta)|u|^2 u - \gamma u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T], \quad (1.1)$$

其初始条件为

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

英文引用格式: Wang P D, Huang C M. Implicit-explicit difference schemes for the nonlinear fractional Ginzburg-Landau equation (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1505–1524, doi: 10.1360/N012018-00157

其中 $i = \sqrt{-1}$, $u(x, t)$ 为时间变量 t 和空间变量 x 的复值函数, $v > 0$, $\kappa > 0$, η 、 ζ 和 γ 为给定的实常数, $u_0(x)$ 为给定的光滑函数. Riesz 分数阶导数定义为

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x, t) = -\frac{1}{2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) \Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi, t)}{|x-\xi|^{\alpha-1}} d\xi. \quad (1.3)$$

该导数还可等价地定义为 $-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x, t) = -\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^\alpha \hat{u}(\xi, t))$ (参见文献 [1]), 其中 $\mathcal{F}$ 为 Fourier 变换, $\hat{u}(\xi, t)$ 是 $u(x, t)$ 的 Fourier 变换像函数.

当 $\alpha = 2$ 时, 上述分数阶算子将退化为经典的 Laplace 算子, 方程 (1.1) 退化为经典的三次非线性复 Ginzburg-Landau 方程 (Ginzburg-Landau equation, GLE), 该方程已被广泛用于描述诸多物理现象, 如非线性波、超传导、超流体、Bose-Einstein 凝聚和液晶等 [2]; 而当 $1 < \alpha < 2$ 时, 即为本文主要研究的 FGLE. 它是 GLE 的自然广义化, 由 Tarasov 和 Zaslavsky [3] 基于分形介质的变分 Euler-Lagrange 方程引入. 该方程还可用于刻画长距离相互作用的系统等 (参见文献 [4–6]). 另外, 如文献 [7] 中所示, 若令 $v, \kappa \rightarrow 0$, 则 FGLE 的解将渐近趋向于分数阶 Schrödinger 方程的解 (参见文献 [8–15] 及其参考文献). 若令 $\eta, \zeta = 0$, 则 FGLE 将退化为一类实系数非线性分数阶反应扩散方程 (参见文献 [16–19]). 对 FGLE 的数学理论研究, 特别是适定性研究, 可参见文献 [20, 21].

非线性 FGLE 为非局部方程, 其精确解不能解析求出, 因此需构造有效的方法进行数值求解. 当前, 包括有限差分方法 [6, 22–26]、有限元方法 [27] 和谱方法 [28] 在内的多种数值方法均已受到关注. 特别地, 就有限差分方法而言, 为有效模拟局部化神经元在弥散型神经网络的传播, Mvogo 等 [6] 分别利用隐式和显式 Euler 公式来逼近方程中的线性和非线性项, 构造了时间方向一阶、空间二阶精度的半隐型 Riesz 分数阶差分格式, 但并未给出格式的理论分析. 我们在文献 [22] 中构造了在时间和空间均具有二阶精度的隐式中点差分格式, 并证明了格式的无条件收敛性. 但该格式为全隐格式, 在每一时间步均需求解一个非线性系统. 与全隐格式不同的是, 隐显型格式采用显式方法处理方程中的非线性项以增加计算有效性, 并用隐式方法处理线性项以避免纯显式方法的时间步长限制 (参见文献 [29]). 特别地, Hao 和 Sun [23] 在时间上采用 Crank-Nicolson/leapfrog 方法, 并在空间上采用四阶拟紧格式, 构造了空间四阶精度的线性化半隐格式. He 和 Pan [24] 基于修正的 Crank-Nicolson/leapfrog 时间离散, 研究了时空均具有二阶精度的线性隐式方法. 我们最近在文献 [25] 中研究了 BDF2/Gear (second-order backward differentiation formulas, BDF2) 隐显型拟紧差分方法. 这几类方法在每一时间步均只需求解一个系数矩阵与时间层无关的线性方程组, 因此具有较高的计算效率.

本文将引入一族新的隐显型差分格式. 在时间离散上, 通过引入带权因子 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$, 我们给出一组带权的隐显型差分方法 (参见 (2.2)). 然后, 利用分数阶拟紧差分方法逼近 Riesz 分数阶导数得到全离散格式. 该全离散格式在时间和空间分别具有二阶和四阶精度. 另外, 通过选择不同的权因子 θ , 我们可得到不同的数值方法. 特别地, 若取 $\theta = 1$, 格式将退化为文献 [25] 中的 BDF2/Gear 方法. 但当 $\theta < 1$ 时, 这些隐显方法对 FGLE 和整数阶 GLE 都尚未有文献讨论. 我们的目的是, 对该类方法进行统一的理论分析, 通过数值实验结合理论分析寻找较优的 θ 取值.

为证明该类格式的无条件收敛性, 我们将利用常微分方程多步方法中的 G 稳定性思想 (参见文献 [30, 31]). 为此, 我们将定义一个与 θ 相关的 G 矩阵和相应的 G 范数, 并建立相关的范数等价性关系. 这些矩阵、范数和等价关系对因子 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ 一致成立. 然后利用离散能量方法证明格式在 l_h^2 范数、 $H_h^{\alpha/2}$ 半范数和 l_h^∞ 范数意义下对因子 θ 一致成立的无条件收敛性.

本文余下内容的结构如下: 第 2 节设计隐显型时间离散方法并引入 Riesz 分数阶导数的四阶拟紧离散方法; 随后在第 3 节构造全离散格式并给出格式在最大范数意义下的无条件收敛性结果, 并在

第 4 节给出收敛性的详细证明; 在第 5 节的数值实验中, 验证理论结果并数值比较不同格式的数值精度及有效性; 最后, 第 6 节给出简要总结.

2 时间和空间离散

2.1 时间离散

鉴于 FGLE (1.1) 的非线性结构, 同时保持稳定性和计算灵活性的一个有效方法是采用隐式方法处理线性项并采用显式方法处理非线性项, 即构造隐显型格式. 为此, 首先引入一些定义和记号.

记 $\tau = \frac{T}{N}$ 为时间步长, 其中 N 为正整数. 并记 $t_n = n\tau$, $0 \leq n \leq N$. 对 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$, 记 $t_{n+\theta} = t_n + \theta\tau$. 给定网格函数 $v = \{v^n \mid 0 \leq n \leq N\}$, 记

$$\begin{aligned} D_t^\theta v^{n+\theta} &= \frac{(\theta + \frac{1}{2})v^{n+1} - 2\theta v^n + (\theta - \frac{1}{2})v^{n-1}}{\tau}, \\ v^{n+\theta} &= \theta v^{n+1} + (1-\theta)v^n, \quad \widehat{v}^{n+\theta} = (1+\theta)v^n - \theta v^{n-1}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

引理 2.1 假设 $v \in C^{(4)}$, 则有

$$D_t^\theta v(t_{n+\theta}) = v'(t_{n+\theta}) + \frac{1}{6}(1-3\theta^2)\tau^2 u'''(t_{n+\theta}) + \frac{\tau^3}{6} \int_0^1 (1-s)^3 \widehat{v_1(\theta, s)} ds, \quad (2.2)$$

其中

$$\begin{aligned} \widehat{v_1(\theta, s)} &= \left(\theta + \frac{1}{2}\right)(1-\theta)^4 v^{(4)}(t_{n+\theta} + s(1-\theta)\tau) - 2\theta^5 v^{(4)}(t_{n+\theta} - s\theta\tau) \\ &\quad + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)(1+\theta)^4 v^{(4)}(t_{n+\theta} - s(1+\theta)\tau), \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \theta v(t_{n+1}) + (1-\theta)v(t_n) &= v(t_{n+\theta}) + \frac{\theta(1-\theta)}{2}\tau^2 v''(t_{n+\theta}) + \frac{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}{6}\tau^3 v'''(t_{n+\theta}) \\ &\quad + \frac{\tau^4}{6} \int_0^1 (1-s)^3 \widehat{v_2(\theta, s)} ds, \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中

$$\widehat{v_2(\theta, s)} = \theta(1-\theta)^4 v^{(4)}(t_{n+\theta} + s(1-\theta)\tau) + (1-\theta)\theta^4 v^{(4)}(t_{n+\theta} - s\theta\tau).$$

另外,

$$\begin{aligned} (1+\theta)v(t_n) - \theta v(t_{n-1}) &= v(t_{n+\theta}) - \frac{\theta(1+\theta)}{2}\tau^2 u''(t_{n+\theta}) + \frac{\theta(1+\theta)(1+2\theta)}{6}\tau^3 v'''(t_{n+\theta}) \\ &\quad + \frac{\tau^4}{6} \int_0^1 (1-s)^3 \widehat{v_3(\theta, s)} ds, \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中

$$\widehat{v_3(\theta, s)} = (1+\theta)\theta^4 v^{(4)}(t_{n+\theta} - s\theta\tau) - \theta(1+\theta)^4 v^{(4)}(t_{n+\theta} - s(1+\theta)\tau).$$

证明 在 $t_{n+\theta}$ 处作 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned} v(t_{n+1}) &= v(t_{n+\theta}) + (1-\theta)\tau v'(t_{n+\theta}) + \frac{[(1-\theta)\tau]^2}{2} v''(t_{n+\theta}) + \frac{[(1-\theta)\tau]^3}{6} v'''(t_{n+\theta}) \\ &\quad + \frac{[(1-\theta)\tau]^4}{6} \int_0^1 (1-s)^3 v^{(4)}(t_{n+\theta} + s(1-\theta)\tau) ds, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} v(t_{n-1}) &= v(t_{n+\theta}) - (1+\theta)\tau v'(t_{n+\theta}) + \frac{[(1+\theta)\tau]^2}{2} v''(t_{n+\theta}) - \frac{[(1+\theta)\tau]^3}{6} v'''(t_{n+\theta}) \\ &\quad + \frac{[(1+\theta)\tau]^4}{6} \int_0^1 (1-s)^3 v^{(4)}(t_{n+\theta} - s(1+\theta)\tau) ds, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} v(t_n) &= v(t_{n+\theta}) - \theta\tau v'(t_{n+\theta}) + \frac{(\theta\tau)^2}{2} v''(t_{n+\theta}) - \frac{(\theta\tau)^3}{6} v'''(t_{n+\theta}) \\ &\quad + \frac{(\theta\tau)^4}{6} \int_0^1 (1-s)^3 v^{(4)}(t_{n+\theta} - s\theta\tau) ds. \end{aligned} \quad (2.7)$$

将上述三式分别代入 (2.2)–(2.4) 的左边可立即得到结果. $\square$

根据上述结果, 若取 $\theta = \frac{1}{2}$, 逼近方法 (2.2) 将退化为

$$D_t^\theta v(t_{n+\theta}) = \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau} = v'(t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{12}\tau^2 u'''(t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{\tau^3}{6} \int_0^1 (1-s)^3 \widehat{v_1(\theta, s)} ds, \quad (2.8)$$

这正是一阶导数的中点公式. 若取 $\theta = 1$, (2.2) 将退化为

$$D_t^\theta v(t_{n+\theta}) = \frac{3v^{n+1} - 4v^n + v^{n-1}}{2\tau} = v'(t_{n+1}) - \frac{1}{3}\tau^2 u'''(t_{n+1}) + \frac{\tau^3}{6} \int_0^1 (1-s)^3 \widehat{v_1(\theta, s)} ds, \quad (2.9)$$

这正是 BDF2 公式. 另外, 若取 $\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, (2.2) 将变为

$$D_t^\theta v(t_{n+\theta}) = v'(t_{n+\theta}) + \frac{\tau^3}{6} \int_0^1 (1-s)^3 \widehat{v_1(\theta, s)} ds. \quad (2.10)$$

显然, 同二阶逼近方法 (2.8) 和 (2.9) 相比, 取 $\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, (2.10) 为一阶导数在 $t_{n+\theta}$ 处的三阶逼近.

2.2 空间离散

为挑选适当的方法用以逼近 Riesz 分数阶导数 (1.3), 首先将其重写为左右 Riemann-Liouville 导数的组合, 即

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x, t) = -\frac{1}{2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} (-_\infty D_x^\alpha u(x, t) + {}_x D_{+\infty}^\alpha u(x, t)), \quad (2.11)$$

其中 $_{-\infty} D_x^\alpha u(x, t)$ 为左 Riemann-Liouville 导数^[32]:

$$_{-\infty} D_x^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^x \frac{u(\xi, t)}{(x-\xi)^{\alpha-1}} d\xi,$$

而 ${}_x D_{+\infty}^\alpha u(x, t)$ 为右 Riemann-Liouville 分数阶导数:

$${}_x D_{+\infty}^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_x^{+\infty} \frac{u(\xi, t)}{(\xi-x)^{\alpha-1}} d\xi.$$

基于此, 许多对分数阶导数的成熟的逼近方法可直接调用以逼近 Riesz 分数阶导数, 如 Grünwald 型方法 [33–35]、Lubich 型方法 [36, 37] 和分数阶中心差分型方法 [10, 38, 39] 等.

我们在本文将采用 Hao 等 [35] 给出的四阶精度的分数阶拟紧差分方法. 该方法是基于带权位移 Grünwald 差分方法 (the weighted and shifted Grünwald difference, WSGD) 和紧技巧而构造的. 最初, 为克服标准 Grünwald 公式在时间相关问题中的无条件不稳定问题, Meerschaert 和 Tadjeran [33] 给出了下列位移 Grünwald 公式:

$$\begin{aligned} {}_L\mathcal{A}_{h,p}^\alpha u(x) &:= \frac{1}{h^\alpha} \sum_{l=0}^{\infty} g_l^{(\alpha)} u(x - (l-p)h) = {}_{-\infty}D_x^\alpha u(x) + O(h), \\ {}_R\mathcal{A}_{h,r}^\alpha u(x) &:= \frac{1}{h^\alpha} \sum_{l=0}^{\infty} g_l^{(\alpha)} u(x + (l-r)h) = {}_xD_{+\infty}^\alpha u(x) + O(h), \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中 p 和 r 为整数且 $g_l^{(\alpha)} = (-1)^l \binom{\alpha}{l}$ 为函数 $(1-z)^\alpha$ 的展开式系数, 即

$$(1-z)^\alpha = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{\alpha}{l} z^l = \sum_{l=0}^{\infty} g_l^{(\alpha)} z^l,$$

其中 $|z| \ll 1$, 且它们可递归计算:

$$g_0^{(\alpha)} = 1, \quad g_l^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{l}\right) g_{l-1}^{(\alpha)}, \quad l = 1, 2, \dots$$

令

$$\lambda_1 = \frac{\alpha^2 + 3\alpha + 2}{12}, \quad \lambda_0 = \frac{4 - \alpha^2}{6}, \quad \lambda_{-1} = \frac{\alpha^2 - 3\alpha + 2}{12}.$$

Hao 等在文献 [35, 定理 2.1 和注 2.4] 中构造了下列 WSGD 算子:

$$\begin{aligned} {}_L\mathcal{D}_h^\alpha u(x) &= \lambda_1 {}_L\mathcal{A}_{h,1}^\alpha u(x) + \lambda_0 {}_L\mathcal{A}_{h,0}^\alpha u(x) + \lambda_{-1} {}_L\mathcal{A}_{h,-1}^\alpha u(x), \\ {}_R\mathcal{D}_h^\alpha u(x) &= \lambda_1 {}_R\mathcal{A}_{h,1}^\alpha u(x) + \lambda_0 {}_R\mathcal{A}_{h,0}^\alpha u(x) + \lambda_{-1} {}_R\mathcal{A}_{h,-1}^\alpha u(x). \end{aligned} \quad (2.13)$$

结合紧技巧, 得到下列结果 (参见文献 [35]):

引理 2.2 假设 $u \in L^1(\mathbb{R})$ 且 $u \in \mathcal{L}^{4+\alpha}(\mathbb{R}) := \{u \mid \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\xi|)^{4+\alpha} |\widehat{u}(\xi)| d\xi < \infty\}$, 则对一固定的 h , 有

$$\begin{aligned} c^\alpha {}_{-\infty}D_x^\alpha u(x-h) + (1-2c^\alpha) {}_{-\infty}D_x^\alpha u(x) + c^\alpha {}_{-\infty}D_x^\alpha u(x+h) &= {}_L\mathcal{D}_h^\alpha u(x) + O(h^4), \\ c^\alpha {}_xD_{+\infty}^\alpha u(x-h) + (1-2c^\alpha) {}_xD_{+\infty}^\alpha u(x) + c^\alpha {}_xD_{+\infty}^\alpha u(x+h) &= {}_R\mathcal{D}_h^\alpha u(x) + O(h^4), \end{aligned} \quad (2.14)$$

其中 $c^\alpha = \frac{-\alpha^2 + \alpha + 4}{24}$.

为记号方便, 由 (2.12), 我们可将 WSGD 算子 (2.13) 重写为

$${}_L\mathcal{D}_h^\alpha u(x) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{l=0}^{\infty} w_l^{(\alpha)} u(x - (l-1)h), \quad {}_R\mathcal{D}_h^\alpha u(x) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{l=0}^{\infty} w_l^{(\alpha)} u(x + (l-1)h),$$

其中

$$\begin{cases} w_0^{(\alpha)} = \lambda_1 g_0^{(\alpha)}, & w_1^{(\alpha)} = \lambda_1 g_1^{(\alpha)} + \lambda_0 g_0^{(\alpha)}, \\ w_l^{(\alpha)} = \lambda_1 g_l^{(\alpha)} + \lambda_0 g_{l-1}^{(\alpha)} + \lambda_{-1} g_{l-2}^{(\alpha)}, & l \geq 2. \end{cases} \quad (2.15)$$

定义平均算子 $\mathcal{A}$ 为

$$\mathcal{A}u(x) := c^\alpha u(x-h) + (1-2c^\alpha)u(x) + c^\alpha u(x+h). \quad (2.16)$$

由 (2.11) 和 (2.14), 可得 Riesz 分数阶导数的紧差分方法为

$$\begin{aligned} \Delta_h^\alpha u(x) &:= \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha\pi}{2}} ({}_L\mathcal{D}_h^\alpha u(x) + {}_R\mathcal{D}_h^\alpha u(x)) \\ &= \frac{1}{h^\alpha} \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha\pi}{2}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} w_l^{(\alpha)} u(x-(l-1)h) + \sum_{l=0}^{\infty} w_l^{(\alpha)} u(x+(l-1)h) \right) \\ &= \mathcal{A}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x) + O(h^4). \end{aligned} \quad (2.17)$$

另外, 对平均算子 $\mathcal{A}$, 我们引入下述结果 (参见文献 [25, 35]):

引理 2.3 对任意网格函数 $v \in \mathcal{V}_h$, 有下式成立:

$$\frac{1}{3} \|v\|_h^2 \leq (\mathcal{A}v, v)_h \leq \|v\|_h^2, \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{9} \|v\|_h^2 \leq \|\mathcal{A}v\|_h^2 \leq \|v\|_h^2. \quad (2.19)$$

2.3 分数阶 Sobolev 范数

为有效利用离散能量方法, 我们先引入分数阶 Sobolev 范数的离散版本 (参见文献 [9, 22, 23, 40, 41]).

记网格函数 $x_j = jh$, 其中 $j \in \mathbb{Z}$ 且 $\mathbb{Z}$ 为正整数集. 对 $h\mathbb{Z}$ 上的任意网格函数 $u = \{u_j\}$ 和 $v = \{v_j\}$, 定义离散内积为 $(u, v)_h = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j \bar{v}_j$ 和相应的离散 l_h^2 范数为 $\|u\|_h^2 = (u, u)_h$. 另外, 定义离散 l_h^∞ 范数为 $\|u\|_{l_h^\infty} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |u_j|$.

记 $l_h^2 := \{u \mid u = \{u_j\}, \|u\|_h < +\infty\}$. 对函数 $u \in l_h^2$, 定义其半离散 Fourier 变换为 $\hat{u} \in L^2[-\pi/h, \pi/h]$:

$$\hat{u}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j e^{-ikx_j},$$

且其逆变换为

$$u_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \hat{u}(k) e^{ikx_j} dk.$$

另外, 易验证下列 Parseval 定理:

$$(u, v)_h = \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \hat{u}(k) \overline{\hat{v}(k)} dk \quad (2.20)$$

成立. 对任一给定常数 $\sigma \in [0, 1]$, 定义分数阶 Sobolev 半范 $|\cdot|_{H_h^\sigma}$ 和范数 $\|\cdot\|_{H_h^\sigma}$ 为

$$|u|_{H_h^\sigma}^2 = \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} |k|^{2\sigma} |\hat{u}(k)|^2 dk, \quad \|u\|_{H_h^\sigma}^2 = \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} (1 + |k|^{2\sigma}) |\hat{u}(k)|^2 dk.$$

由 (2.20), 易得 $\|u\|_{H_h^\sigma}^2 = \|u\|_h^2 + |u|_{H_h^\sigma}^2$.

引理 2.4 ^[41] 对所有 $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$, 存在与 $h > 0$ 无关的常数 $C_\sigma = C(\sigma) > 0$ 使得

$$\|u\|_{l_h^\infty} \leq C_\sigma \|u\|_{H_h^\sigma}. \quad (2.21)$$

最后引入下列等价关系式 (参见文献 [22]).

引理 2.5 若 $1 < \alpha \leq 2$, 则有

$$C_\alpha |u|_{H_h^{\alpha/2}}^2 \leq (\Delta_h^\alpha u, u)_h \leq |u|_{H_h^{\alpha/2}}^2 \quad (2.22)$$

成立, 其中 $C_\alpha = \frac{2^\alpha(1-\alpha^2)}{3\pi^\alpha \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} > 0$.

3 隐显型差分格式和收敛性结果

在实际计算中, 无界区域问题往往需截断为有界区域问题. 如文献 [22, 25] 中, 我们使用扩展型 Dirichlet 边界条件^[42, 43] 并考虑有限区间 $\Omega = (a, b)$ 上的下列问题:

$$u_t + (v + i\eta)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u + (\kappa + i\zeta)|u|^2 u - \gamma u = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \Omega, \quad t \in [0, T]. \quad (3.3)$$

基于边界条件 (3.3), 方程 (3.1) 中的分数阶导数将退化为

$$-(\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x, t) = -\frac{1}{2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} ({}_a D_x^\alpha u(x, t) + {}_x D_b^\alpha u(x, t)).$$

对一正整数 M , 选定 $h = \frac{b-a}{M}$, 并记 $x_j = a + jh$, $0 \leq j \leq M$. 由边界条件 (3.3), 若 $u \in \mathcal{L}^{4+\alpha}(\mathbb{R})$ (参见文献 [35, 注 2.6]), Riesz 分数阶导数的拟紧逼近 (2.17) 可写为

$$\begin{aligned} \Delta_h^\alpha u(x_j) &= \frac{1}{h^\alpha} \frac{1}{2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \left(\sum_{l=0}^{j+1} w_l^{(\alpha)} u(x_{j-l+1}) + \sum_{l=0}^{M-j+1} w_l^{(\alpha)} u(x_{j+l-1}) \right) \\ &= \mathcal{A}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x_j) + O(h^4). \end{aligned} \quad (3.4)$$

另外, 定义序列集 $\mathcal{T}_M = \{j \mid j = 1, 2, \dots, M-1\}$ 和网格函数空间 $\mathcal{V}_h = \{v \mid v = (v_1, v_2, \dots, v_{M-1})\}$.

基于边界条件 (3.3), 若当 $j \leq 0$ 和 $j \geq M$ 时取 $u_j = 0$, 则先前定义在无限区间上的内积 $(\cdot, \cdot)_h$ 及范数 $\|\cdot\|_h$ 、 $\|\cdot\|_{l_h^p}$ 和 $\|\cdot\|_{l_h^\infty}$ 在有限区间上仍成立. 因此, 在这些记号中, 我们将限制序列 $1 \leq j \leq M-1$ 并继续使用它们. 基于这些考虑, 在上一节中引入的不等式在有限区间情形仍然成立.

对方程 (3.1), 在网格点 $(x_j, t_{n+\theta})$ 处有

$$\begin{aligned} u_t(x_j, t_{n+\theta}) + (v + i\eta)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x_j, t_{n+\theta}) + (\kappa + i\zeta)|u(x_j, t_{n+\theta})|^2 u(x_j, t_{n+\theta}) \\ - \gamma u(x_j, t_{n+\theta}) = 0, \quad j \in \mathcal{T}_M, \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{aligned}$$

在上述方程两端同时作用平均算子 $\mathcal{A}$, 则有

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u_t(x_j, t_{n+\theta}) + (v + i\eta)\mathcal{A}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x_j, t_{n+\theta}) + (\kappa + i\zeta)\mathcal{A}|u(x_j, t_{n+\theta})|^2 u(x_j, t_{n+\theta}) \\ - \gamma \mathcal{A}u(x_j, t_{n+\theta}) = 0, \quad j \in \mathcal{T}_M, \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{aligned}$$

由 (3.4) 可得

$$\mathcal{A}u_t(x_j, t_{n+\theta}) + (v + i\eta)\Delta_h^\alpha u(x_j, t_{n+\theta}) + (\kappa + i\zeta)\mathcal{A}|u(x_j, t_{n+\theta})|^2 u(x_j, t_{n+\theta})$$

$$-\gamma \mathcal{A}u(x_j, t_{n+\theta}) = O(h^4), \quad j \in \mathcal{T}_M, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

为记号方便, 记网格函数 $U_j^n := u(x_j, t_n)$. 然后为离散时间, 使用记号 (2.1), 采用下列隐显方法:

$$\begin{aligned} AD_t^\theta U_j^{n+\theta} + (v + i\eta)\Delta_h^\alpha U_j^{n+\theta} + (\kappa + i\zeta)\mathcal{A}|\tilde{U}_j^{n+\theta}|^2 \tilde{U}_j^{n+\theta} - \gamma \mathcal{A}\tilde{U}_j^{n+\theta} &= R_j^{n+\theta}, \\ j \in \mathcal{T}_M, \quad 1 \leq n \leq N-1, \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中

$$R_j^{n+\theta} = O(\tau^2 + h^4). \quad (3.6)$$

舍去 (3.5) 中的小项 $R_j^{n+\theta}$, 并记 u_j^n 为 $u(x_j, t_n)$ 的数值逼近, 则可得下列差分格式:

$$\begin{aligned} AD_t^\theta u_j^{n+\theta} + (v + i\eta)\Delta_h^\alpha u_j^{n+\theta} + (\kappa + i\zeta)\mathcal{A}|\tilde{u}_j^{n+\theta}|^2 \tilde{u}_j^{n+\theta} - \gamma \mathcal{A}\tilde{u}_j^{n+\theta} &= 0, \\ j \in \mathcal{T}_M, \quad 1 \leq n \leq N-1, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (3.8)$$

$$u_j^n = 0, \quad j \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{T}_M, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (3.9)$$

其中第一层的值 u^1 由下列预估校正格式给出^[25]:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\left(\frac{u_j^1 - u_{0j}}{\tau}\right) + (v + i\eta)\Delta_h^\alpha \frac{u_j^1 + u_{0j}}{2} + (\kappa + i\zeta)\mathcal{A}|u_j^{(\frac{1}{2})}|^2 u_j^{(\frac{1}{2})} - \gamma \mathcal{A}u_j^{(\frac{1}{2})} &= 0, \\ \mathcal{A}\left(\frac{u_j^{(\frac{1}{2})} - u_{0j}}{\tau/2}\right) + (v + i\eta)\Delta_h^\alpha u_{0j} + (\kappa + i\zeta)\mathcal{A}|u_{0j}|^2 u_{0j} - \gamma \mathcal{A}u_{0j} &= 0, \quad j \in \mathcal{T}_M, \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中 $u_{0j} := u_0(x_j)$, 且该格式的截断误差为

$$R_j^1 = O(\tau^2 + h^4), \quad j \in \mathcal{T}_M. \quad (3.11)$$

注 3.1 当执行格式 (3.7)–(3.10) 时, 在每一时间步仅需求解一个线性系统, 且此线性系统的系数矩阵与时间层无关. 因此, 格式本质上可非常有效地显式实现.

注 3.2 当取 $\theta = \frac{1}{2}$ 时, 格式 (3.7) 为 Crank-Nicolson/Adams 方法, 该方法可看作是文献 [22] 中隐式中点格式的线性化. 当取 $\theta = 1$ 时, 该格式将退化为文献 [25] 中所构造的 BDF2/Gear 格式. 而当 θ 取其他值时, 至少对 GLE 型方程 (包括整数阶和分数阶情形) 而言, 格式是全新的. 特别地, 当 $\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 如 (2.10) 所示, $D_t^\theta u^{n+\theta}$ 为一阶时间导数的三阶逼近. 尽管格式整体仍为二阶, 但该格式在数值精度方面仍具有一定优势 (参见数值测试).

接下来将给出本文的主要理论结果. 首先将给出格式 (3.7)–(3.10) 的唯一可解性. 注意到格式本质上为一线性系统, 因此只需验证其齐次系统仅有零解. 通过简单计算, 容易得到下列结果.

定理 3.1 差分格式 (3.7)–(3.10) 是唯一可解的.

定义误差函数 e^n 为

$$e_j^n = U_j^n - u_j^n, \quad j \in \mathcal{T}_M, \quad 0 \leq n \leq N.$$

我们给出如下收敛性结果并将在下节中给出详细证明.

定理 3.2 假设问题 (3.1)–(3.3) 具有光滑解, 则存在充分小的 $\tau_0 > 0$ 和 $h_0 > 0$, 使得当 $0 < \tau \leq \tau_0$ 和 $0 < h \leq h_0$ 时, 对 $0 \leq n \leq N$, 有

$$\|e^n\|_h \leq C_1(\tau^2 + h^4), \quad |e^n|_{H_h^{\alpha/2}} \leq C_2(\tau^2 + h^4), \quad \|e^n\|_{l_h^\infty} \leq C_3(\tau^2 + h^4), \quad \|u^n\|_{l_h^\infty} \leq 1 + C_u, \quad (3.12)$$

其中 $C_u = \sup_{0 \leq t \leq T, a \leq x \leq b} |u(x, t)|$, 且 C_k ($k = 1, 2, 3$) 为与 τ 和 h 无关的正常数.

4 误差估计

本节将建立格式 (3.7)–(3.10) 在 l_h^2 范数、 $H_h^{\alpha/2}$ 半范数和 l_h^∞ 范数意义下的误差估计. 为此, 首先引入下列辅助性结果.

4.1 离散 G 范数

定义矩阵

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1^{(\alpha)} & w_0^{(\alpha)} & & & \\ w_2^{(\alpha)} & w_1^{(\alpha)} & w_0^{(\alpha)} & & \\ \vdots & w_2^{(\alpha)} & w_1^{(\alpha)} & \ddots & \\ w_{M-2}^{(\alpha)} & \vdots & \ddots & \ddots & w_0^{(\alpha)} \\ w_{M-1}^{(\alpha)} & w_{M-2}^{(\alpha)} & \cdots & w_2^{(\alpha)} & w_1^{(\alpha)} \end{pmatrix}$$

和矩阵 $\mathbf{C} = \frac{1}{2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}(\mathbf{W} + \mathbf{W}^T) \in \mathbb{R}^{(M-1) \times (M-1)}$. 对 $u = [u_1, u_2, \dots, u_{M-1}]^T$, 则可将 WSGD 逼近写为矩阵形式 $\Delta_h^\alpha u = \frac{1}{h^\alpha} \mathbf{C}u$. 如文献 [22] 中所示, 矩阵 $\mathbf{C}$ 为一实对称正定矩阵. 然后引入下列引理.

引理 4.1 [22] 对任意两个网格函数 $u, v \in \mathcal{V}_h$, 存在线性算子 Λ_h^α 使得

$$(\Delta_h^\alpha u, v)_h = (\Lambda_h^\alpha u, \Lambda_h^\alpha v)_h, \quad (4.1)$$

其中线性算子 Λ_h^α 定义为 $\Lambda_h^\alpha u = h^{-\frac{\alpha}{2}} \mathbf{L}u$, 矩阵 $\mathbf{L}$ 满足 $\mathbf{C} = \mathbf{L}^T \mathbf{L}$, 为 Cholesky 因子.

为分析格式的收敛性, 我们将借助常微分方程多步方法的 G 稳定性思想 (对 G 稳定性理论的详细阐述, 参见专著 [30, 第 V.6 章]). 为此, 首先引入 G 矩阵

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\theta(2\theta-1)}{2} & -\frac{(\theta+1)(2\theta-1)}{2} \\ -\frac{(\theta+1)(2\theta-1)}{2} & \frac{\theta(2\theta+3)}{2} \end{pmatrix},$$

并定义相应的离散 G 范数为

$$\|\mathbf{v}\|_G^2 = \sum_{k,l=1}^2 G_{j,l}(v^k, v^l)_h = \frac{\theta(2\theta-1)}{2} \|v^1\|_h^2 + \frac{\theta(2\theta+3)}{2} \|v^2\|_h^2 - (\theta+1)(2\theta-1)(v^1, v^2)_h, \quad (4.2)$$

其中 $\mathbf{v} = [v^1, v^2]^T$, $v^1, v^2 \in \mathcal{V}_h$. 明显地, 若 $\theta = \frac{1}{2}$, 则离散 G 范数将退化为离散 l_h^2 范数, 即

$$\|\mathbf{v}\|_G^2 = \|v^2\|_h^2. \quad (4.3)$$

而当 $\theta \in (\frac{1}{2}, 1]$ 时, 容易验证 G 矩阵为对称正定矩阵, 且 G 范数 (4.2) 等价于 l_h^2 范数, 即存在 $C_l, C_r > 0$ 使得

$$C_l(\|v^1\|_h^2 + \|v^2\|_h^2) \leq \|\mathbf{v}\|_G^2 \leq C_r(\|v^1\|_h^2 + \|v^2\|_h^2). \quad (4.4)$$

类似地, 由 (2.16) 和 (2.18) 可知, 算子 $\mathcal{A}$ 是对称正定的, 因此可定义范数 $\|v\|_A^2 = (\mathcal{A}v, v)_h$. 然后定义离散 GA 范数为

$$\|\mathbf{v}\|_{GA}^2 = \sum_{k,l=1}^2 G_{j,l}(\mathcal{A}v^k, v^l)_h = \frac{\theta(2\theta-1)}{2} \|v^1\|_A^2 + \frac{\theta(2\theta+3)}{2} \|v^2\|_A^2 - (\theta+1)(2\theta-1)(\mathcal{A}v^1, v^2)_h. \quad (4.5)$$

由 (2.18) 和 (4.4) 可得

$$\frac{C_l}{3}(\|v^1\|_h^2 + \|v^2\|_h^2) \leq \|v\|_{GA}^2 \leq C_r(\|v^1\|_h^2 + \|v^2\|_h^2). \quad (4.6)$$

另外, 我们可得下列结果.

引理 4.2 对任意 $v^n \in \mathcal{V}_h$, $n = 0, 1, 2$, 记 $v^0 = [v^0, v^1]^T$ 和 $v^1 = [v^1, v^2]^T$, 则有

$$\begin{aligned} & \left(\left(\theta + \frac{1}{2} \right) v^2 - 2\theta v^1 + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) v^0, \theta v^2 + (1 - \theta) v^1 \right)_h \\ &= \frac{1}{2}(\|v^1\|_G^2 - \|v^0\|_G^2) + \frac{\|\alpha_1 v^2 + \alpha_2 v^1 + \alpha_3 v^0\|_h^2}{4}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{A} \left(\left(\theta + \frac{1}{2} \right) v^2 - 2\theta v^1 + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) v^0 \right), \theta v^2 + (1 - \theta) v^1 \right)_h \\ &= \frac{1}{2}(\|v^1\|_{GA}^2 - \|v^0\|_{GA}^2) + \frac{\|\alpha_1 v^2 + \alpha_2 v^1 + \alpha_3 v^0\|_A^2}{4} \end{aligned} \quad (4.8)$$

成立, 其中 $\alpha_1 = \alpha_3 = \sqrt{\theta(2\theta - 1)}$ 和 $\alpha_2 = -2\sqrt{\theta(2\theta - 1)}$.

证明 通过直接但枯燥的代数计算可得等式 (4.7). 由 (4.5) 和 (4.7), 可直接得到等式 (4.8). $\square$

注 4.1 当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时, 等式 (4.7) 将退化为

$$\left(v^2 - v^1, \frac{1}{2}(v^2 + v^1) \right)_h = \frac{1}{2}(\|v^2\|_h^2 - \|v^1\|_h^2).$$

类似地, 等式 (4.8) 将变为

$$\left(\mathcal{A}(v^2 - v^1), \frac{1}{2}(v^2 + v^1) \right)_h = \frac{1}{2}(\|v^2\|_A^2 - \|v^1\|_A^2).$$

最后, 我们引入下列 Gronwall 引理.

引理 4.3 ^[44] 令 q_n 为一非负序列且 φ_n 满足

$$\varphi_n \leq g_0 + \sum_{l=0}^{n-1} p_l + \sum_{l=0}^{n-1} q_l \varphi_l, \quad n \geq 1.$$

若对任意 $n \geq 0$, 有 $g_0 \geq 0$ 且 $p_n \geq 0$, 则

$$\varphi_n \leq \left(g_0 + \sum_{l=0}^{n-1} p_l \right) \exp \left(\sum_{l=0}^{n-1} q_l \right), \quad n \geq 1.$$

4.2 定理 3.2 的证明

基于以上准备, 我们将证明定理 3.2.

由 (3.6) 和 (3.11), 首先将局部误差写为

$$|R_j^{n+\theta}| \leq C_R(\tau^2 + h^4), \quad j \in \mathcal{T}_M, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (4.9)$$

$$\|R^{n+\theta}\|_h \leq \sqrt{b-a} C_R(\tau^2 + h^4), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (4.10)$$

其中 C_R 为与 τ 和 h 无关的正常数.

由 (3.2) 和 (3.8) 可知, $u^0 = U^0$, $e^0 = 0$.

当 $n = 1$ 时, 可得下面误差方程:

$$\mathcal{A} \frac{e_j^1}{\tau} + (v + i\eta) \Delta_h^\alpha \frac{e_j^1}{2} = R_j^1, \quad j \in \mathcal{T}_M.$$

对该方程关于 e^1 作离散内积并取实部可得

$$\frac{1}{\tau} (\mathcal{A} e^1, e^1)_h + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ (v + i\eta) (\Delta_h^\alpha e^1, e^1)_h \} = \operatorname{Re} (R^1, e^1)_h.$$

由 (4.1) 和 (2.18) 可得

$$\frac{1}{3\tau} \|e^1\|_h^2 + \frac{v}{2} \|\Lambda_h^\alpha e^1\|_h^2 \leq \operatorname{Re} (R^1, e^1)_h. \quad (4.11)$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式, 上式右端可估计为

$$\operatorname{Re} (R^1, e^1)_h \leq \|R^1\|_h \|e^1\|_h \leq \frac{1}{4\tau} \|e^1\|_h^2 + \tau \|R^1\|_h^2. \quad (4.12)$$

将 (4.12) 代入 (4.11) 并丢掉左端正项可得

$$\|e^1\|_h^2 \leq 12\tau^2 \|R^1\|_h^2 \leq 12\tau^2 (b-a) C_R^2 (\tau^2 + h^4)^2. \quad (4.13)$$

类似于 (4.12), 取

$$\operatorname{Re} (R^1, e^1)_h \leq \|R^1\|_h \|e^1\|_h \leq \frac{1}{3\tau} \|e^1\|_h^2 + \frac{3\tau}{4} \|R^1\|_h^2. \quad (4.14)$$

将 (4.14) 代入 (4.11) 得

$$\frac{v}{2} \|\Lambda_h^\alpha e^1\|_h^2 \leq \frac{3\tau}{4} \|R^1\|_h^2. \quad (4.15)$$

由 (4.10) 可得

$$\|\Lambda_h^\alpha e^1\|_h^2 \leq \frac{3(b-a)C_R^2\tau}{2v} (\tau^2 + h^4)^2. \quad (4.16)$$

定义常量

$$\begin{aligned} C_M &:= (2\theta + 1)(1 + C_u)^2, \\ \varepsilon_1 &:= \frac{6\sqrt{6}(1 + \theta)\theta^2(3C_M\sqrt{\kappa^2 + \zeta^2} + |\gamma|)}{C_l\sqrt{C_l}}, \\ \varepsilon_2 &:= 3\sqrt{2}(1 + \theta)(3C_M\sqrt{\kappa^2 + \zeta^2} + |\gamma|), \\ C_1 &:= \sqrt{\frac{36(C_r C_l T + 2\theta^2)(b-a)C_R^2 T}{C_l^2} \exp\left(\frac{(3\theta^2 + C_l \varepsilon_1^2)T}{3\theta^2}\right)}, \\ C_2 &:= \sqrt{\frac{(9C_r + 12)(b-a)C_R^2 T + 8\varepsilon_2^2 C_1^2 T}{6v C_l C_\alpha}}, \\ C_3 &:= C_\sigma \sqrt{C_1^2 + C_2^2}. \end{aligned}$$

以下用数学归纳法证明: 当步长满足 $\tau \leq \frac{1}{2}$ 且 $\tau^2 + h^2 \leq 1/C_3$ 时, 对任意 $0 \leq n \leq N-1$, 有

$$\|e^n\|_{\text{GA}}^2 \leq \exp\left(2\left(1 + \frac{C_l \varepsilon_1^2}{3\theta^2}\right)n\tau\right)\left(\|e^0\|_{\text{GA}}^2 + \frac{24\theta^2(b-a)C_R^2}{C_l}n\tau(\tau^2 + h^4)^2\right), \quad (4.17)$$

$$\|\Lambda_h^\alpha e^n\|_G^2 \leq \|\Lambda_h^\alpha e^0\|_G^2 + \left(\frac{4\varepsilon_2^2 C_1^2}{3v}n\tau + \frac{2(b-a)C_R^2}{v}n\tau\right)(\tau^2 + h^4)^2, \quad (4.18)$$

$$\|e^{n+1}\|_{l_h^\infty} \leq C_3(\tau^2 + h^4), \quad \|u^{n+1}\|_{l_h^\infty} \leq 1 + C_u, \quad (4.19)$$

其中 $e^n = [e^n, e^{n+1}]^T$.

当 $n=0$ 时, (4.17) 和 (4.18) 显然成立. 由 (4.13) 和 (4.16) 并结合 (4.6)、(2.22)、(4.4) 和 (4.1) 可得 $\|e^1\|_h \leq C_1(\tau^2 + h^4)$, $|e^1|_{H_h^{\alpha/2}} \leq C_2(\tau^2 + h^4)$. 由 (2.21) 可得 $\|e^1\|_{l_h^\infty} \leq C_3(\tau^2 + h^4)$. 考虑到 $\tau^2 + h^4 \leq 1/C_3$, 可得

$$\|u^1\|_{l_h^\infty} \leq \|e^1\|_{l_h^\infty} + \|U^1\|_{l_h^\infty} \leq 1 + C_u,$$

即 (4.19) 对 $n=0$ 也成立.

现假设 (4.17)–(4.19) 对 $0 \leq n \leq m-1 \leq N-2$ 成立, 进一步证明其对 $n=m$ 亦成立. 为此, 将 (3.7) 减去 (3.5) 可得下列误差方程对 $1 \leq n \leq m$ 都成立:

$$\mathcal{A}D_t^\theta e_j^{n+\theta} + (v + i\eta)\Delta_h^\alpha e_j^{n+\theta} + (\kappa + i\zeta)\mathcal{A}g_j^{n+\theta} - \gamma\mathcal{A}\tilde{e}_j^{n+\theta} = R_j^{n+\theta}, \quad j \in \mathcal{T}_M, \quad (4.20)$$

其中 $\tilde{e}_j^{n+\theta} = (\theta+1)e_j^n - \theta e_j^{n-1} = \tilde{U}_j^{n+\theta} - \tilde{u}_j^{n+\theta}$, $g_j^{n+\theta} = |\tilde{U}_j^{n+\theta}|^2 \tilde{U}_j^{n+\theta} - |\tilde{u}_j^{n+\theta}|^2 \tilde{u}_j^{n+\theta}$.

基于归纳假设, 当 $\tau^2 + h^4 \leq 1/C_3$ 时,

$$\|u^n\|_{l_h^\infty} \leq 1 + C_u, \quad 1 \leq n \leq m. \quad (4.21)$$

因此, 结合 (2.1) 的记号定义可得

$$\|(|\tilde{U}^{n+\theta}|^2)\|_{l_h^\infty} \leq C_M, \quad \|(\tilde{U}^{n+\theta}\tilde{u}^{n+\theta})\|_{l_h^\infty} \leq C_M, \quad \|(|\tilde{u}^{n+\theta}|^2)\|_{l_h^\infty} \leq C_M. \quad (4.22)$$

随后证明将分三步完成.

第 1 步 建立 $\|\cdot\|_h$ 误差估计. 计算 (4.20) 关于 $e^{n+\theta}$ 的离散内积并取实部可得

$$\begin{aligned} & \text{Re}(\mathcal{A}D_t^\theta e^{n+\theta}, e^{n+\theta})_h + \text{Re}\{(v + i\eta)(\Delta_h^\alpha e^{n+\theta}, e^{n+\theta})_h\} \\ &= -\text{Re}\{(\kappa + i\zeta)(\mathcal{A}g^{n+\theta}, e^{n+\theta})_h\} + \gamma\text{Re}(\mathcal{A}\tilde{e}^{n+\theta}, e^{n+\theta})_h + \text{Re}(R^{n+\theta}, e^{n+\theta})_h. \end{aligned} \quad (4.23)$$

现在估计 (4.23) 的每一项. 对左端第一项, 由 (4.8) 可得

$$(\mathcal{A}D_t^\theta e^{n+\theta}, e^{n+\theta})_h = \frac{1}{2\tau}(\|e^n\|_{\text{GA}}^2 - \|e^{n-1}\|_{\text{GA}}^2) + \frac{\|\alpha_1 e^{n+1} + \alpha_2 e^n + \alpha_3 e^{n-1}\|_A^2}{4\tau}, \quad (4.24)$$

其中 $e^n = [e^n, e^{n+1}]^T$, $e^{n-1} = [e^{n-1}, e^n]^T$. 对左端第二项, 由 (4.1) 可得

$$(\Delta_h^\alpha e^{n+\theta}, e^{n+\theta})_h = \|\Lambda_h^\alpha e^{n+\theta}\|. \quad (4.25)$$

对右端第一项, 注意到

$$g_j^{n+\theta} = |\tilde{U}_j^{n+\theta}|^2 \tilde{U}_j^{n+\theta} - |\tilde{u}_j^{n+\theta}|^2 \tilde{u}_j^{n+\theta} = |\tilde{U}_j^{n+\theta}|^2 \tilde{e}_j^{n+\theta} + \tilde{U}_j^{n+\theta} \tilde{u}_j^{n+\theta} \tilde{e}_j^{n+\theta} + |\tilde{u}_j^{n+\theta}|^2 \tilde{e}_j^{n+\theta},$$

则

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}g^{n+\theta}, e^{n+\theta})_h &= (\mathcal{A}(|\tilde{U}^{n+\theta}|^2 \tilde{e}^{n+\theta}), e^{n+\theta})_h + (\mathcal{A}(\tilde{U}^{n+\theta} \tilde{u}^{n+\theta} \tilde{e}^{n+\theta}), e^{n+\theta})_h \\ &\quad + (\mathcal{A}(|\tilde{u}^{n+\theta}|^2 \tilde{e}^{n+\theta}), e^{n+\theta})_h, \end{aligned} \quad (4.26)$$

其中 $\tilde{e}_j^{n+\theta}$ 表示 $\tilde{e}_j^{n+\theta}$ 的复共轭. 由 (2.19)、(4.6)、(4.22) 和 Cauchy-Schwarz 不等式, 上式右端第一项可估计为

$$\begin{aligned} |(\mathcal{A}(|\tilde{U}^{n+\theta}|^2 \tilde{e}^{n+\theta}), e^{n+\theta})_h| &\leq C_M \|\tilde{e}^{n+\theta}\|_h \|e^{n+\theta}\|_h \\ &\leq C_M \sqrt{2}(1+\theta)(\|e^n\|_h^2 + \|e^{n-1}\|_h^2)^{1/2} \|e^{n+\theta}\|_h \\ &\leq \frac{\sqrt{6}(1+\theta)C_M}{\sqrt{C_l}} \|e^{n-1}\|_{\text{GA}} \|e^{n+\theta}\|_h. \end{aligned} \quad (4.27)$$

类似地, 对 (4.26) 中的第二和三项, 有

$$\begin{aligned} |(\mathcal{A}(\tilde{U}^{n+\theta} \tilde{u}^{n+\theta} \tilde{e}^{n+\theta}), e^{n+\theta})_h| &\leq \frac{\sqrt{6}(1+\theta)C_M}{\sqrt{C_l}} \|e^{n-1}\|_{\text{GA}} \|e^{n+\theta}\|_h, \\ |(\mathcal{A}(|\tilde{u}^{n+\theta}|^2 \tilde{e}^{n+\theta}), e^{n+\theta})_h| &\leq \frac{\sqrt{6}(1+\theta)C_M}{\sqrt{C_l}} \|e^{n-1}\|_{\text{GA}} \|e^{n+\theta}\|_h. \end{aligned} \quad (4.28)$$

对 (4.23) 中右端第二项, 类似可得

$$|(\mathcal{A}\tilde{e}^{n+\theta}, e^{n+\theta})_h| \leq \frac{\sqrt{6}(1+\theta)}{\sqrt{C_l}} \|e^{n-1}\|_{\text{GA}} \|e^{n+\theta}\|_h. \quad (4.29)$$

由 (4.6) 可得

$$\|e^{n+\theta}\|_h^2 \leq \frac{6\theta^2}{C_l} \|e^n\|_{\text{GA}}^2. \quad (4.30)$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式, 最后一项可估计为

$$\text{Re}(R^{n+\theta}, e^{n+\theta})_h \leq \|R^{n+\theta}\|_h \|e^{n+\theta}\|_h \leq \frac{6\theta^2}{C_l} \|R^{n+\theta}\|_h^2 + \frac{1}{4} \|e^n\|_{\text{GA}}^2. \quad (4.31)$$

将 (4.24)–(4.31) 代入 (4.23) 并舍去左端某些正项可得

$$\begin{aligned} &\frac{\|e^n\|_{\text{GA}}^2 - \|e^{n-1}\|_{\text{GA}}^2}{2\tau} \\ &\leq \frac{\sqrt{6}(1+\theta)(3C_M\sqrt{\kappa^2 + \zeta^2} + |\gamma|)}{\sqrt{C_l}} \|e^{n-1}\|_{\text{GA}} \|e^{n+\theta}\|_h + \frac{6\theta^2}{C_l} \|R^{n+\theta}\|_h^2 + \frac{1}{4} \|e^n\|_{\text{GA}}^2 \\ &\leq \frac{\sqrt{6}(1+\theta)(3C_M\sqrt{\kappa^2 + \zeta^2} + |\gamma|)}{\sqrt{C_l}} \left(\varepsilon_1 \|e^{n-1}\|_{\text{GA}}^2 + \frac{6\theta^2}{4\varepsilon_1 C_l} \|e^n\|_{\text{GA}}^2 \right) + \frac{6\theta^2}{C_l} \|R^{n+1}\|_h^2 + \frac{1}{4} \|e^n\|_{\text{GA}}^2. \end{aligned}$$

由 ε_1 的定义知,

$$\frac{6\sqrt{6}(1+\theta)\theta^2(3C_M\sqrt{\kappa^2 + \zeta^2} + |\gamma|)}{4C_l\sqrt{C_l}\varepsilon_1} = \frac{1}{4},$$

从而,

$$\frac{\|e^n\|_{\text{GA}}^2 - \|e^{n-1}\|_{\text{GA}}^2}{2\tau} \leq \frac{C_l\varepsilon_1^2}{6\theta^2} \|e^{n-1}\|_{\text{GA}}^2 + \frac{1}{2} \|e^n\|_{\text{GA}}^2 + \frac{6\theta^2}{C_l} \|R^{n+\theta}\|_h^2.$$

对上述不等式关于 n 从 1 到 m 求和可得

$$\|e^m\|_{\text{GA}}^2 \leq \tau \|e^m\|_{\text{GA}}^2 + \left(1 + \frac{C_l \varepsilon_1^2}{3\theta^2}\right) \tau \sum_{n=0}^{m-1} \|e^n\|_{\text{GA}}^2 + (1 - \tau) \|e^0\|_{\text{GA}}^2 + \frac{12\theta^2 \tau}{C_l} \sum_{n=1}^m \|R^{n+\theta}\|_h^2.$$

当 $\tau \leq \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\|e^m\|_{\text{GA}}^2 \leq 2 \left(1 + \frac{C_l \varepsilon_1^2}{3\theta^2}\right) \tau \sum_{n=0}^{m-1} \|e^n\|_{\text{GA}}^2 + \left(\|e^0\|_{\text{GA}}^2 + \frac{24\theta^2 \tau}{C_l} \sum_{n=1}^m \|R^{n+\theta}\|_h^2\right).$$

由 (4.10) 和引理 4.3 可得

$$\|e^m\|_{\text{GA}}^2 \leq \exp \left(2 \left(1 + \frac{C_l \varepsilon_1^2}{3\theta^2}\right) m\tau\right) \left(\|e^0\|_{\text{GA}}^2 + \frac{24\theta^2(b-a)C_R^2}{C_l} m\tau(\tau^2 + h^4)\right).$$

因此, (4.17) 对 $n = m$ 成立. 进一步由 (4.13) 可得

$$\|e^m\|_{\text{GA}}^2 \leq \left(12(b-a)C_R^2 C_r \tau^2 + \frac{24\theta^2(b-a)C_R^2}{C_l} m\tau\right) \exp \left(2 \left(1 + \frac{C_l \varepsilon_1^2}{3\theta^2}\right) m\tau\right) (\tau^2 + h^4)^2.$$

结合 (4.6) 可得

$$\|e^{m+1}\|_h \leq C_1(\tau^2 + h^4). \quad (4.32)$$

第 2 步 建立 $|\cdot|_{H_h^{\alpha/2}}$ 误差估计. 计算 (4.20) 关于 $D_t^\theta e^{n+\theta}$ 的内积并取实部可得

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}D_t^\theta e^{n+\theta}, D_t^\theta e^{n+\theta})_h + \text{Re}\{(v + i\eta)(\Delta_h^\alpha e^{n+\theta}, D_t^\theta e^{n+\theta})_h\} \\ &= -\text{Re}\{(\kappa + i\zeta)(\mathcal{A}g^{n+\theta}, D_t^\theta e^{n+\theta})_h\} + \gamma \text{Re}(\mathcal{A}\tilde{e}^{n+\theta}, D_t^\theta e^{n+\theta})_h + \text{Re}(R^{n+\theta}, D_t^\theta e^{n+\theta})_h. \end{aligned} \quad (4.33)$$

现在估计 (4.33) 中的每一项. 对左端第一项, 由 (2.18) 可得

$$(\mathcal{A}D_t^\theta e^{n+\theta}, D_t^\theta e^{n+\theta})_h \geq \frac{1}{3} \|D_t^\theta e^{n+\theta}\|_h^2. \quad (4.34)$$

对左端第二项, 由 (4.1) 和 (4.7) 可得

$$\begin{aligned} (\Delta_h^\alpha e^{n+\theta}, D_t^\theta e^{n+\theta})_h &= (\Lambda_h^\alpha e^{n+\theta}, D_t \Lambda_h^\alpha e^{n+\theta})_h \\ &= \frac{\|\Lambda_h^\alpha e^n\|_G^2 - \|\Lambda_h^\alpha e^{n-1}\|_G^2}{2\tau} + \frac{\|\Lambda_h^\alpha(\alpha_1 e^{n+1} + \alpha_2 e^n + \alpha_3 e^{n-1})\|_h^2}{4\tau}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

类似于 (4.26)–(4.28), (4.33) 中右端第一项可估计为

$$|(\mathcal{A}g^{n+\theta}, D_t^\theta e^{n+\theta})_h| \leq 3C_M \sqrt{2}(1 + \theta)(\|e^n\|_h^2 + \|e^{n-1}\|_h^2)^{1/2} \|D_t^\theta e^{n+\theta}\|_h. \quad (4.36)$$

类似地可估计右端第二项为

$$|(\mathcal{A}\tilde{e}^{n+\theta}, D_t^\theta e^{n+\theta})_h| \leq \sqrt{2}(1 + \theta)(\|e^n\|_h^2 + \|e^{n-1}\|_h^2)^{1/2} \|D_t^\theta e^{n+\theta}\|_h. \quad (4.37)$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式, 对最后一项有

$$\text{Re}(R^{n+\theta}, D_t^\theta e^{n+1})_h \leq \|R^{n+1}\|_h \|D_t e^{n+1}\|_h \leq \|R^{n+\theta}\|_h^2 + \frac{1}{4} \|D_t^\theta e^{n+\theta}\|_h^2. \quad (4.38)$$

将 (4.34)–(4.38) 代入 (4.33) 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \|D_t^\theta e^{n+\theta}\|_h^2 + v \frac{\|\Lambda_h^\alpha e^n\|_G^2 - \|\Lambda_h^\alpha e^{n-1}\|_G^2}{2\tau} \\ & \leq \sqrt{2}(1+\theta)(3C_M\sqrt{\kappa^2 + \zeta^2} + |\gamma|)(\|e^n\|_h^2 + \|e^{n-1}\|_h^2)^{1/2} \|D_t^\theta e^{n+\theta}\|_h + \|R^{n+\theta}\|_h^2 + \frac{1}{4} \|D_t e^{n+1}\|_h^2 \\ & \leq \sqrt{2}(1+\theta)(3C_M\sqrt{\kappa^2 + \zeta^2} + |\gamma|) \left(\varepsilon_2(\|e^n\|_h^2 + \|e^{n-1}\|_h^2) + \frac{1}{4\varepsilon_2} \|D_t^\theta e^{n+\theta}\|_h^2 \right) \\ & \quad + \|R^{n+\theta}\|_h^2 + \frac{1}{4} \|D_t^\theta e^{n+\theta}\|_h^2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

由 ε_2 的定义知,

$$\frac{\sqrt{2}(1+\theta)(3C_M\sqrt{\kappa^2 + \zeta^2} + |\gamma|)}{4\varepsilon_2} = \frac{1}{12},$$

用其消去 (4.39) 两边的 $\|D_t e^{n+1}\|_h^2$ 项, 则有

$$v \frac{\|\Lambda_h^\alpha e^n\|_G^2 - \|\Lambda_h^\alpha e^{n-1}\|_G^2}{2\tau} \leq \frac{\varepsilon_2^2}{3} (\|e^n\|_h^2 + \|e^{n-1}\|_h^2) + \|R^{n+\theta}\|_h^2.$$

对上述不等式关于 n 从 1 到 m 求和可得

$$\|\Lambda_h^\alpha e^m\|_G^2 \leq \|\Lambda_h^\alpha e^0\|_G^2 + \frac{2\varepsilon_2^2}{3v} \tau \sum_{n=1}^m (\|e^n\|_h^2 + \|e^{n-1}\|_h^2) + \frac{2}{v} \tau \sum_{n=1}^m \|R^{n+\theta}\|_h^2.$$

由 (4.32) 可得

$$\|\Lambda_h^\alpha e^m\|_G^2 \leq \|\Lambda_h^\alpha e^0\|_G^2 + \left(\frac{4\varepsilon_2^2 C_1^2}{3v} m\tau + \frac{2(b-a)C_R^2}{v} m\tau \right) (\tau^2 + h^4)^2.$$

因此, (4.18) 对 $n = m$ 成立. 进一步由 (4.16) 可得

$$\|\Lambda_h^\alpha e^m\|_G^2 \leq \left(\frac{3(b-a)C_R^2 C_r}{2v} \tau + \frac{4\varepsilon_2^2 C_1^2}{3v} m\tau + \frac{2(b-a)C_R^2}{v} m\tau \right) (\tau^2 + h^4)^2.$$

结合 (2.22)、(4.4) 和 (4.1) 可得

$$|e^{m+1}|_{H_h^{\alpha/2}} \leq C_2(\tau^2 + h^4). \quad (4.40)$$

第 3 步 建立 $\|\cdot\|_{l_h^\infty}$ 误差估计. 由 (4.32) 和 (4.40), 并考虑到 $C_3 := C_\sigma \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, 则由 (2.21) 可得 $\|e^{m+1}\|_{l_h^\infty} \leq C_3(\tau^2 + h^4)$. 另外, 由 $\tau^2 + h^4 \leq 1/C_3$ 可得

$$\|u^{m+1}\|_{l_h^\infty} \leq \|e^{m+1}\|_{l_h^\infty} + \|U^{m+1}\|_{l_h^\infty} \leq 1 + C_u.$$

因此, (4.19) 对 $n = m$ 亦成立.

由归纳法结论知 (4.17)–(4.19) 对所有 $0 \leq n \leq N-1$ 都成立. 类似于 (4.32) 和 (4.40) 的处理可得 (3.12) 成立.

4.3 稳定性

本小节考察差分格式 (3.7)–(3.9) 的稳定性. 为此, 引入如下扰动差分格式:

$$\mathcal{A} D_t^\theta v_j^{n+\theta} + (v + i\eta) \Delta_h^\alpha v_j^{n+\theta} + (\kappa + i\zeta) \mathcal{A} |\widehat{v}_j^{n+\theta}|^2 \widehat{v}_j^{n+\theta} - \gamma \mathcal{A} \widehat{v}_j^{n+\theta} = 0, \quad j \in \mathcal{T}_M, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (4.41)$$

$$v_j^0 = v_0(x_j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (4.42)$$

$$v_j^n = 0, \quad j \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{T}_M, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (4.43)$$

由上述收敛性结果可知, 当 $C_3(\tau^2 + h^4) \leq 1$ 时, 差分解满足

$$\|u^n\|_{l_h^\infty} \leq 1 + C_u, \quad \|v^n\|_{l_h^\infty} \leq 1 + C_u. \quad (4.44)$$

定义 $\varepsilon_j^n = u_j^n - v_j^n$. 将差分格式 (3.7)–(3.9) 减去上述格式 (4.41)–(4.43), 可得扰动方程

$$\mathcal{A}D_t^\theta \varepsilon_j^{n+\theta} + (v + i\eta)\Delta_h \varepsilon_j^{n+\theta} + (\kappa + i\zeta)\mathcal{A}g_j^{n+\theta} - \gamma \mathcal{A}\varepsilon_j^{n+\theta} = 0, \quad j \in \mathcal{T}_M, \quad (4.45)$$

其中 $\varepsilon_j^{n+\theta} = (\theta + 1)\varepsilon_j^n - \theta\varepsilon_j^{n-1} = \tilde{u}_j^{n+\theta} - \tilde{v}_j^{n+\theta}$, $g_j^{n+\theta} = |\tilde{u}_j^{n+\theta}|^2 \tilde{u}_j^{n+\theta} - |\tilde{v}_j^{n+\theta}|^2 \tilde{v}_j^{n+\theta}$. 注意到上述扰动方程形式上类似于误差方程 (4.20) 当右端 $R_j^{n+\theta} = 0$ 时的情形. 基于差分解的有界性结果 (4.44), 通过类似于定理 3.2 的证明过程, 我们可得下列一致稳定性结果:

定理 4.1 假设问题 (3.1)–(3.3) 具有光滑解, 则存在充分小的 $\tau_0 > 0$ 和 $h_0 > 0$, 使得当 $0 < \tau \leq \tau_0$ 和 $0 < h \leq h_0$ 时, 对 $0 \leq n \leq N$, 有

$$\|\varepsilon^n\|_{l_h^\infty} \leq C_4 \|\varepsilon^0\|_{l_h^\infty}, \quad (4.46)$$

其中 C_4 为与 τ 和 h 无关的正常数.

5 数值实验

在数值测试中, 我们将计算并数值比较当 θ 取不同值时格式 (3.7)–(3.10) 的数值精度. 特别地, 我们以 θ 取值 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 和 1 为例. 如注 3.2 中所述, 当 θ 分别取三个值时, 我们将分别得到 Crank-Nicolson/Adams 格式、新的 BDF (backward differentiation formula) 型隐显格式和 BDF2/Gear 格式, 并在后文中分别简记为 CNA、BDFs 和 BDF2 格式. 因为三种格式具有相似的计算复杂度, 我们将从数值精度的角度进行比较.

在该测试中, 取初值条件为

$$u_0(x) = \text{sech}(x) \exp(2ix), \quad x \in \Omega. \quad (5.1)$$

取计算区间 $\Omega = (-16, 16)$ 足够大使得边界条件齐次化. 另外, 在方程中取 $v = 1$, $\eta = 1$, $\kappa = 1$, $\zeta = 1$, $\gamma = -1$. 当取该因子值时, 方程存在整体解且该解展现出耗散性. 但方程解析解不能显式给出, 我们将利用 BDF2 格式在小时间步长 $\tau = 0.0001$ 和空间步长 $h = 0.01$ 下求得的数值解作为近似精确解.

首先计算并比较格式的时间和空间数值精度. 为此, 我们将计算 $t = 1$ 时刻的 l_h^∞ 范数误差. 表 1 和 2 分别给出格式在取不同 θ 值时的时间和空间误差. 从表 1 和 2 中可观测到下列结果: (i) 当 θ 分别取 $1/2$ 、 $\sqrt{3}/3$ 和 1 时, 三个格式在时间上均具有二阶精度且在空间上具有四阶精度, 该结果同理论结果 (定理 3.2) 一致; (ii) 从误差的角度, 三个格式具有几乎相同的空间误差, 这是因为三个格式采用相同的空间离散; 当 $\theta = \sqrt{3}/3$ 时, 格式具有最小的时间离散误差, 且当 $\theta = 1$ 时, BDF2 格式的时间误差最大.

为进一步数值比较不同格式, 我们在图 1 和 2 中展示出整体误差随时间的演化情形. 在该测试中, 取 $\alpha = 1.5$, 当 α 取其他值时可得类似结果. 如文献 [22, 23, 27] 中所示, 因子 γ 的取值将影响方程解析

表 1 当 $1 < \alpha < 2$ 时格式在 $t = 1$ 的时间误差及其收敛阶, $h = 0.01$

α	τ	$e_{\text{CNA}} (\theta = \frac{1}{2})$	收敛阶	$e_{\text{BDFs}} (\theta = \frac{\sqrt{3}}{3})$	收敛阶	$e_{\text{BDF2}} (\theta = 1)$	收敛阶
1.3	1/40	1.7631E-04	—	1.5785E-04	—	2.6019E-04	—
	1/80	4.5163E-05	1.9649	4.0531E-05	1.9615	6.5345E-05	1.9934
	1/160	1.1435E-05	1.9816	1.0274E-05	1.9800	1.6349E-05	1.9989
1.6	1/40	1.4922E-04	—	1.2739E-04	—	2.8326E-04	—
	1/80	3.8957E-05	1.9375	3.3436E-05	1.9297	7.1437E-05	1.9874
	1/160	9.9563E-06	1.9682	8.5638E-06	1.9651	1.7903E-05	1.9964
1.9	1/40	1.5921E-04	—	1.4563E-04	—	3.2745E-04	—
	1/80	4.2561E-05	1.9033	3.9135E-05	1.8958	8.3241E-05	1.9759
	1/160	1.1000E-05	1.9520	1.0137E-05	1.9489	2.0945E-05	1.9907

表 2 当 $1 < \alpha < 2$ 时格式在 $t = 1$ 的空间误差及其收敛阶, $\tau = 0.0001$

α	h	$e_{\text{CNA}} (\theta = \frac{1}{2})$	收敛阶	$e_{\text{BDFs}} (\theta = \frac{\sqrt{3}}{3})$	收敛阶	$e_{\text{BDF2}} (\theta = 1)$	收敛阶
1.3	0.4	2.1203E-04	—	2.1203E-04	—	2.1202E-04	—
	0.2	1.5709E-05	3.7546	1.5708E-05	3.7547	1.5702E-05	3.7552
	0.1	1.0740E-06	3.8706	1.0729E-06	3.8719	1.0662E-06	3.8804
1.6	0.4	1.4992E-04	—	1.4992E-04	—	1.4991E-04	—
	0.2	1.0333E-05	3.8589	1.0332E-05	3.8590	1.0327E-05	3.8597
	0.1	6.8270E-07	3.9198	6.8200E-07	3.9212	6.7766E-07	3.9297
1.9	0.4	6.4877E-05	—	6.4877E-05	—	6.4874E-05	—
	0.2	4.1627E-06	3.9621	4.1622E-06	3.9623	4.1591E-06	3.9633
	0.1	2.6544E-07	3.9710	2.6490E-07	3.9738	2.6186E-07	3.9894

图 1 (网络版彩图) 当 θ 取不同值时的格式误差 e_{∞} . (a) $\gamma = -1$; (b) $\gamma = 1$

解的性态. 因此分别取 $\gamma = -1$ 和 $\gamma = 1$ 两种情形为例, 并分别观测格式在各情形下的误差演化情形. 由图 1(a) 可观测到, 当 $\gamma = -1$ 时, 取 $\theta = \sqrt{3}/3$ 时所得的 BDFs 格式最为精确, 而 $\theta = 1$ 时所得到的 BDF2 格式误差最大, 该结果同表 1 中结果相一致. 当 $\gamma = 1$ 时, 由图 1(b) 可知, 取 $\theta = 1$ 时所得的 CNA 格式最为精确, 而取 $\theta = 1$ 时所得到的 BDF2 格式误差最大. 在长时间数值仿真中, 三种格式具

图 2 (网络版彩图) 当 θ 取不同值时的格式误差 e_∞ , 其中 $\gamma = -1$

有相似的误差演化, 均不会出现快速增长 (参见图 2). 以上结果表明, 三种格式均可有效求解 FGLE; 在 $\gamma = -1$ 情形, $\theta = \sqrt{3}/3$ 时所得到的格式更为精确, 而在 $\gamma = 1$ 情形, $\theta = 1/2$ 时所得到的格式更为精确.

6 结论

本文给出了一组求解空间分数阶 Ginzburg-Landau 方程的二阶隐显型差分格式. 通过调节格式中的权因子 θ , 我们可得到不同的数值格式, 并且这些格式均可有效运算. 特别地, 当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时, 将得到 Crank-Nicolson/Adams 格式; 当 $\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 将得到一个新的 BDF 型隐显格式; 当 $\theta = 1$ 时, 将得到 BDF2/Gear 格式. 使用离散能量方法和 G 稳定技巧, 我们证明了格式在多种离散范数意义下的无条件收敛性, 该结果对所有 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ 一致成立. 通过数值比较可观测到, 同现有文献中的 BDF2/Gear 格式相比, 取 $\theta = \frac{1}{2}$ 时所得到的 Crank-Nicolson/Adams 格式和 $\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时所得到的格式在数值精度上存在一定优势.

致谢 感谢两位审稿人对本文的审阅和提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Yang Q, Liu F, Turner I. Numerical methods for fractional partial differential equations with Riesz space fractional derivatives. *Appl Math Model*, 2010, 34: 200–218
- 2 Aranson I S, Kramer L. The world of the complex Ginzburg-Landau equation. *Rev Modern Phys*, 2002, 74: 99–143
- 3 Tarasov V E, Zaslavsky G M. Fractional Ginzburg-Landau equation for fractal media. *Phys A*, 2005, 354: 249–261
- 4 Tarasov V E, Zaslavsky G M. Fractional dynamics of coupled oscillators with long-range interaction. *Chaos*, 2006, 16: 023110
- 5 Milovanov A V, Rasmussen J J. Fractional generalization of the Ginzburg-Landau equation: An unconventional approach to critical phenomena in complex media. *Phys Lett A*, 2005, 337: 75–80
- 6 Mvogo A, Tambue A, Ben-Bolie G H, et al. Localized numerical impulse solutions in diffuse neural networks modeled by the complex fractional Ginzburg-Landau equation. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2016, 39: 396–410
- 7 Guo B, Huo Z. Well-posedness for the nonlinear fractional Schrödinger equation and inviscid limit behavior of solution for the fractional Ginzburg-Landau equation. *Fract Calc Appl Anal*, 2013, 16: 226–242
- 8 Wang D, Xiao A, Yang W. Crank-Nicolson difference scheme for the coupled nonlinear Schrödinger equations with the Riesz space fractional derivative. *J Comput Phys*, 2013, 242: 670–681
- 9 Wang D, Xiao A, Yang W. Maximum-norm error analysis of a difference scheme for the space fractional CNLS. *Appl Math Comput*, 2015, 257: 241–251

- 10 Zhao X, Sun Z Z, Hao Z P. A fourth-order compact ADI scheme for two-dimensional nonlinear space fractional Schrödinger equation. *SIAM J Sci Comput*, 2014, 36: A2865–A2886
- 11 Ran M, Zhang C. A conservative difference scheme for solving the strongly coupled nonlinear fractional Schrödinger equations. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2016, 41: 64–83
- 12 Wang P, Huang C. An energy conservative difference scheme for the nonlinear fractional Schrödinger equations. *J Comput Phys*, 2015, 293: 238–251
- 13 Wang P, Huang C. Structure-preserving numerical methods for the fractional Schrödinger equation. *Appl Numer Math*, 2018, 129: 137–158
- 14 Li M, Huang C, Wang P. Galerkin finite element method for nonlinear fractional Schrödinger equations. *Numer Algorithms*, 2017, 74: 499–525
- 15 Li M, Gu X M, Huang C, et al. A fast linearized conservative finite element method for the strongly coupled nonlinear fractional Schrödinger equations. *J Comput Phys*, 2018, 358: 256–282
- 16 Zhuang P, Liu F, Anh V, et al. Numerical methods for the variable-order fractional advection-diffusion equation with a nonlinear source term. *SIAM J Numer Anal*, 2009, 47: 1760–1781
- 17 Bu W, Tang Y, Yang J. Galerkin finite element method for two-dimensional Riesz space fractional diffusion equations. *J Comput Phys*, 2014, 276: 26–38
- 18 Song F, Xu C, Karniadakis G E. A fractional phase-field model for two-phase flows with tunable sharpness: Algorithms and simulations. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2016, 305: 376–404
- 19 Hou T, Tang T, Yang J. Numerical analysis of fully discretized Crank-Nicolson scheme for fractional-in-space Allen-Cahn equations. *J Sci Comput*, 2017, 72: 1214–1231
- 20 Pu X, Guo B. Well-posedness and dynamics for the fractional Ginzburg-Landau equation. *Appl Anal*, 2013, 92: 318–334
- 21 Lu H, Bates P W, Lü S, et al. Dynamics of the 3-D fractional complex Ginzburg-Landau equation. *J Differential Equations*, 2015, 259: 5276–5301
- 22 Wang P, Huang C. An implicit midpoint difference scheme for the fractional Ginzburg-Landau equation. *J Comput Phys*, 2016, 312: 31–49
- 23 Hao Z P, Sun Z Z. A linearized high-order difference scheme for the fractional Ginzburg-Landau equation. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 2017, 33: 105–124
- 24 He D, Pan K. An unconditionally stable linearized difference scheme for the fractional Ginzburg-Landau equation. *Numer Algorithms*, 2018, 79: 899–925
- 25 Wang P, Huang C. An efficient fourth-order in space difference scheme for the nonlinear fractional Ginzburg-Landau equation. *BIT*, 2018, 58: 783–805
- 26 Wang N, Huang C. An efficient split-step quasi-compact finite difference method for the nonlinear fractional Ginzburg-Landau equations. *Comput Math Appl*, 2018, 75: 2223–2242
- 27 Li M, Huang C, Wang N. Galerkin finite element method for the nonlinear fractional Ginzburg-Landau equation. *Appl Numer Math*, 2017, 118: 131–149
- 28 Lu H, Lü S, Zhang M. Fourier spectral approximations to the dynamics of 3D fractional complex Ginzburg-Landau equation. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2017, 37: 2539–2564
- 29 Ascher U M, Ruuth S J, Wetton B T R. Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations. *SIAM J Numer Anal*, 1995, 32: 797–823
- 30 Hairer E, Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, 2nd ed. Springer Series in Computational Mathematics 14. Berlin: Springer, 1996
- 31 李寿佛. 刚性微分方程算法理论. 长沙: 湖南科技出版社, 1997
- 32 Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. San Diego: Academic Press, 1999
- 33 Meerschaert M M, Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations. *J Comput Appl Math*, 2004, 172: 65–77
- 34 Tian W Y, Zhou H, Deng W. A class of second order difference approximations for solving space fractional diffusion equations. *Math Comp*, 2015, 84: 1703–1727
- 35 Hao Z P, Sun Z Z, Cao W R. A fourth-order approximation of fractional derivatives with its applications. *J Comput Phys*, 2015, 281: 787–805
- 36 Chen M, Deng W. Fourth order accurate scheme for the space fractional diffusion equations. *SIAM J Numer Anal*, 2014, 52: 1418–1438
- 37 Ding H, Li C. High-order algorithms for Riesz derivative and their applications (III). *Fract Calc Appl Anal*, 2016, 19: 19–55
- 38 Çelik C, Duman M. Crank-Nicolson method for the fractional diffusion equation with the Riesz fractional derivative.

- J Comput Phys, 2012, 231: 1743–1750
- 39 Ding H, Li C, Chen Y Q. High-order algorithms for Riesz derivative and their applications (II). J Comput Phys, 2015, 293: 218–237
- 40 Kirkpatrick K, Lenzmann E, Staffilani G. On the continuum limit for discrete NLS with long-range lattice interactions. Comm Math Phys, 2013, 317: 563–591
- 41 Wang P, Huang C, Zhao L. Point-wise error estimate of a conservative difference scheme for the fractional Schrödinger equation. J Comput Appl Math, 2016, 306: 231–247
- 42 Du Q, Gunzburger M, Lehoucq R B, et al. Analysis and approximation of nonlocal diffusion problems with volume constraints. SIAM Rev, 2012, 54: 667–696
- 43 Deng W, Li B, Tian W, et al. Boundary problems for the fractional and tempered fractional operators. Multiscale Model Simul, 2018, 16: 125–149
- 44 Quarteroni A, Valli A. Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer Series in Computational Mathematics 23. Berlin: Springer, 1994

Implicit-explicit difference schemes for the nonlinear fractional Ginzburg-Landau equation

Pengde Wang & Chengming Huang

Abstract This paper proposes and analyzes a family of second-order weighted implicit-explicit difference schemes for the nonlinear complex fractional Ginzburg-Landau equation involving the Riesz space fractional derivative. The schemes are implicit in the linear term in the underlying equation while explicit in the nonlinear term, and a fourth-order fractional quasi-compact method is used to approximate the Riesz fractional derivative. By introducing a factor $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ in the scheme, we can obtain different schemes by changing the factor. The schemes can be performed effectively because only a linear system with a coefficient matrix independent of the time level needs to be solved at each time step. We prove the unconditional convergence of the schemes in the l_h^2 norm, semi- $H_h^{\alpha/2}$ norm and l_h^∞ norm with a unified fashion for all $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ by using the discrete energy method and the idea of the G -stability. Numerical tests are provided to confirm the theoretical results.

Keywords space-fractional Ginzburg-Landau equation, Riesz fractional derivative, implicit-explicit method, compact difference scheme, point-wise error estimate

MSC(2010) 35R11, 65M06, 65M12, 65M15

doi: 10.1360/N012018-00157