抛物型积分算子的弱型极限行为

献给王斯雷教授 85 华诞

侯宪明, 伍火熊*

厦门大学数学科学学院, 厦门 361005

E-mail: houxianming37@163.com, huoxwu@xmu.edu.cn

收稿日期: 2018-04-24; 接受日期: 2018-06-09; 网络出版日期: 2018-09-30; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11771358 和 11471041) 资助项目

摘要 设 $0 \leq \beta < \alpha$, $q = \alpha/(\alpha - \beta)$, $f \geq 0$. 本文研究带齐次核 Ω 的抛物型奇异积分和分数次积分算子的弱型极限行为, 建立了如下结果:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^q m(\{x \in \mathbb{R}^n : T_{\Omega, \beta}^\alpha f(x) > \lambda\}) = \frac{1}{\alpha} \|\Omega\|_q^q \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^q,$$

以及

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^q m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|T_{\Omega, \beta}^\alpha f(x) - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right| > \lambda\right\}\right) = 0,$$

其中 Ω 满足 L_β^q -Dini 条件, 当 $\beta = 0$ 时, 还需满足 $\int_{S^{n-1}} \Omega(x') J(x') d\sigma(x') = 0$. 同时, 给出了相应的抛物型极大奇异积分和 Marcinkiewicz 积分的弱型极限行为. 此外, 建立了关于 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 上 Hardy-Littlewood 极大函数的相应结果.

关键词 极限行为 弱型估计 抛物型奇异积分 抛物型 Marcinkiewicz 积分 极大算子 Heisenberg 群

MSC (2010) 主题分类 42B20, 42B25

1 引言

对于固定的实数 $\alpha_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, 取定 $x \in \mathbb{R}^n$, 函数 $F(x, \rho) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\rho^{2\alpha_i}}$ 是关于 $\rho > 0$ 的递减函数. 令 $\rho(x)$ 表示方程 $F(x, \rho) = 0$ 的唯一解. Fabes 和 Rivire^[1] 证明了 $\rho(x)$ 是一个度量, 称 $(\mathbb{R}^n, \rho)$ 是一个关于 $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ 的混合齐性空间. 对于 $\lambda > 0$, $\alpha_i \geq 1$, 定义更一般的抛物型伸缩:

$$A_\lambda : (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (\lambda^{\alpha_1} x_1, \lambda^{\alpha_2} x_2, \dots, \lambda^{\alpha_n} x_n).$$

在混合齐性空间中, 对于 $x \in \mathbb{R}^n$, 作变换

$$x_1 = \rho^{\alpha_1} \cos \theta_1 \cdots \cos \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1},$$

英文引用格式: Hou X M, Wu H X. Limiting weak-type behaviors for parabolic singular integrals and related operators (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1339–1354, doi: 10.1360/N012018-00113

$$\begin{aligned}
x_2 &= \rho^{\alpha_2} \cos \theta_1 \cdots \cos \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}, \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= \rho^{\alpha_{n-1}} \cos \theta_1 \sin \theta_2, \\
x_n &= \rho^{\alpha_n} \sin \theta_1,
\end{aligned}$$

则 $dx = \rho^{\alpha-1} J(x') d\rho d\sigma(x')$, 其中 $\rho^{\alpha-1} J(x')$ 是上述变换的 Jacobi 行列式, $x' = A_{\rho(x)^{-1}}(x) \in S^{n-1}$ ($\mathbb{R}^n$ 中的单位球面), $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. 由文献 [1] 知, $J(x') \in C^\infty(S^{n-1})$, 且存在 $N \geq 1$ 使得

$$1 \leq J(x') \leq N, \quad \forall x' \in S^{n-1}.$$

不难看出, 当 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ 时, $\rho(x) = |x|$, $J(x') = 1$. 设 $\Omega(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值可测函数, 满足与 A_λ 相关的零阶齐次性

$$\Omega(A_\lambda x) = \Omega(x), \quad \forall \lambda > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (1.1)$$

对 $\alpha_i \geq 1$ ($i = 1, \dots, n$), $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $0 \leq \beta < \alpha$, 定义关于齐性核 Ω 的抛物型奇异和分数次积分算子

$$T_{\Omega, \beta}^\alpha f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}} f(y) dy,$$

其中, 对 $\beta = 0$ 还需满足下列消失性条件:

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x') J(x') d\sigma(x') = 0, \quad (1.2)$$

且记 $T_{\Omega, 0}^\alpha$ 为 T_Ω^α .

由文献 [1, 2] 可知, $T_{\Omega, \beta}^\alpha$ 是弱 $(1, q)$ 型有界, 其中 Ω 满足如下 L_β^q -Dini 条件:

$$\int_0^1 \frac{\omega_1(\delta)}{\delta^{1+\beta}} d\delta < \infty, \quad 0 \leq \beta < \alpha, \quad q = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}, \quad (1.3)$$

这里 $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ 且对于 $\delta > 0$, $\omega_1(\delta) = \sup_{|h| \leq \delta} \int_{S^{n-1}} |\Omega(x' + h) - \Omega(x')| d\sigma(x')$. 事实上, 上述结果在粗糙核情形下也成立 (参见文献 [2, 3]).

注意到, 当 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ 时, $T_{\Omega, \beta}^\alpha$ 即为经典的卷积型奇异积分和分数次积分算子 $T_{\Omega, \beta}$. 通常记 $T_{\Omega, 0}$ 为 T_Ω . 为了估计 T_Ω 的弱型 $(1, 1)$ 范数, Janakiraman^[4] 获得了如下极限行为:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda m(\{x \in \mathbb{R}^n : |T_\Omega f(x)| > \lambda\}) = \frac{1}{n} \|\Omega\|_{L^1} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

其中 Ω 满足

$$\int_{S^{n-1}} |\Omega(x - \delta \xi) - \Omega(x)| d\sigma(x) \leq c n \delta \|\Omega\|_{L^1}, \quad \forall \xi \in S^{n-1}, \quad 0 < \delta < \frac{1}{n}. \quad (1.4)$$

这给出了 T_Ω 的弱型 $(1, 1)$ 范数的一个下界. 同时, 在文献 [4] 中, 关于 Hardy-Littlewood 极大函数的相应结果也被建立. 随后, Ding 和 Lai^[5, 6] 在 Ω 满足比 (1.4) 更弱的 L_β^q -Dini 条件下, 建立了 $T_{\Omega, \beta}$ 和带齐性核 Ω 的 Hardy-Littlewood 极大函数与分数次极大函数的相应结论. 最近, Guo 等^[7] 将上述结果作了进一步完善与推广. 受上述结果启发, 本文将建立如下结果:

定理 1.1 设 $0 \leq \beta < \alpha$, $q = \alpha/(\alpha - \beta)$. 若 Ω 满足 L_β^q -Dini 条件, 则对 $f \geq 0$ 且 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 有

- (i) $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^q m(\{x \in \mathbb{R}^n : T_{\Omega, \beta}^\alpha f(x) > \lambda\}) = \frac{1}{\alpha} \|\Omega\|_q^q \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^q$;
(ii) $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^q m(\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\Omega, \beta}^\alpha f(x) - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}| > \lambda\}) = 0$.

注 1.1 我们指出定理 1.1 中的结论 (ii) 比结论 (i) 更强 (参见注 2.1). 因此, 即使在 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ 的特殊情形, 我们的结果也是对文献 [4, 5] 中相应结果的改进.

对于 $\beta = 0$, 考虑相应的极大奇异积分算子:

$$T_\Omega^{\alpha, *} f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{\rho(x-y) > \varepsilon} \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha} f(y) dy \right|.$$

利用定理 1.1 的证明方法并适当修正, 我们能建立下列结果:

定理 1.2 设 Ω 满足 (1.1)、(1.2) 和 L^1 -Dini 条件. 若 $T_\Omega^{\alpha, *}$ 是弱 $(1, 1)$ 型算子, 则对 $f \geq 0$ 且 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 有

- (i) $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda m(\{x \in \mathbb{R}^n : |T_\Omega^{\alpha, *} f(x)| > \lambda\}) = \frac{1}{\alpha} \|\Omega\|_1 \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$;
(ii) $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda m(\{x \in \mathbb{R}^n : |T_\Omega^{\alpha, *} f(x) - \frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}| > \lambda\}) = 0$.

另一方面, 对 $0 \leq \beta < \alpha$ 和 $q = \alpha/(\alpha - \beta)$, 定义抛物型 Marcinkiewicz 和分数次 Marcinkiewicz 积分算子 $\mu_{\Omega, \beta}^\alpha$ 如下:

$$\mu_{\Omega, \beta}^\alpha f(x) = \left(\int_0^\infty \left| \int_{\rho(x-y) \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta-1}} f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2},$$

其中 Ω 满足 (1.1), 当 $\beta = 0$ 时还满足 (1.2), 且记 $\mu_{\Omega, 0}^\alpha$ 为 μ_Ω^α . 由文献 [8] 知, 当 $\Omega \in L \log L(S^{n-1})$ 时, μ_Ω^α 是弱型 $(1, 1)$ 有界的. 对 $0 < \beta < \alpha$, 注意到 $|\mu_{\Omega, \beta}^\alpha f(x)| \leq T_{|\Omega|, \beta}^\alpha(|f|)(x)$, 由文献 [2] 知, 当 $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ 和 $q = \alpha/(\alpha - \beta)$ 时, $\mu_{\Omega, \beta}^\alpha$ 是弱 $(1, q)$ 型有界的. 考虑其弱型极限行为, 我们有下面的定理:

定理 1.3 设 $0 \leq \beta < \alpha$, $q = \alpha/(\alpha - \beta)$. 若 Ω 满足 L_β^q -Dini 条件, 则对 $f \geq 0$ 且 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 有

- (i) $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^q m(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mu_{\Omega, \beta}^\alpha f(x)| > \lambda\}) = \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha 2^{q/2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^q$;
(ii) $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^q m(\{x \in \mathbb{R}^n : |\mu_{\Omega, \beta}^\alpha f(x) - \frac{|\Omega(x)|}{\sqrt{2}\rho(x)^{\alpha-\beta}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}| > \lambda\}) = 0$.

此外, 对 $X = (0, \infty)$, 设 M 是 $(X, |\cdot|, \nu)$ 上的 Hardy-Littlewood 极大函数, 其中 $|\cdot|$ 是 X 上的 Euclid 度量, $d\nu(x) = x dx$. Hu 和 Huang^[9] 给出了如下弱型极限行为:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda \nu(\{x \in X : Mf(x) > \lambda\}) = \frac{1}{4} \|f\|_1, \quad \forall f \in L^1(X, d\nu).$$

在一般度量测度空间上的 Hardy-Littlewood 极大函数的弱型极限结果如何? 这是一个十分有意义的问题. 在这里, 我们讨论 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 上 Hardy-Littlewood 极大函数的弱型极限性质. 为此, 先回顾一些相关的概念和记号. Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 是具底流形 $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ 的非交换幂零 Lie 群, 群结构为

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, \dots, x_{2n}, x_{2n+1})(x'_1, x'_2, \dots, x'_{2n}, x'_{2n+1}) \\ &= \left(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots, x_{2n} + x'_{2n}, x_{2n+1} + x'_{2n+1} + 2 \sum_{j=1}^n (x'_j x_{n+j} - x_j x'_{n+j}) \right). \end{aligned}$$

显然, Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 上的单位元是 $0 \in \mathbb{R}^{2n+1}$, x 的逆元 $x^{-1} = -x$. 对于 $\lambda > 0$, Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 上的伸缩为

$$B_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_{2n}, x_{2n+1}) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_{2n}, \lambda^2 x_{2n+1}).$$

$\mathbb{H}^n$ 上的 Haar 测度为 $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度. 可测集 $E \in \mathbb{H}^n$ 的测度表示为 $m(E)$. $Q = 2n + 2$ 为 $\mathbb{H}^n$ 的齐次维数, 那么, $m(B_\lambda(E)) = \lambda^Q m(E)$. 定义 $\mathbb{H}^n$ 的齐次范数为

$$|x|_h = \left[\left(\sum_{i=1}^{2n} x_i^2 \right)^2 + x_{2n+1}^2 \right]^{1/4},$$

由此导出 $\mathbb{H}^n$ 上的左不变距离 $d(p, q) = d(q^{-1}p, 0) = |q^{-1}p|_h$, 其中 $p, q \in \mathbb{H}^n$. 对于 $r > 0$, 有 $x \in \mathbb{H}^n$, $\mathbb{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{H}^n : d(x, y) < r\}$ 表示 x 为中心、 r 为半径的球. $\mathbb{H}^n$ 中单位球 $\mathbb{B}(0, 1)$ 的体积记为

$$\Omega_Q := \frac{2\pi^{n+1/2}\Gamma(n/2)}{(n+1)\Gamma(n)\Gamma((n+1)/2)}.$$

那么, 单位球球面面积 $\omega_Q = Q\Omega_Q$. 因此, $m(\mathbb{B}(x, r)) = m(\mathbb{B}(0, r)) = \Omega_Q r^Q$. 关于 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 的基本理论可以参见文献 [10, 11]. 定义 $\mathbb{H}^n$ 上的中心 Hardy-Littlewood 极大函数

$$M_{\mathbb{H}}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(\mathbb{B}(x, r))} \int_{\mathbb{B}(x, r)} |f(y)| dy.$$

由文献 [12] 知, $\|M_{\mathbb{H}}f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{H}^n)} \leq C\|f\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}$. 我们将建立此弱型估计的如下极限结果:

定理 1.4 对于 $f \in L^1(\mathbb{H}^n)$, 则

- (i) $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda m(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\mathbb{H}}f(x) > \lambda\}) = \|f\|_{L^1(\mathbb{H}^n)};$
- (ii) $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda m(\{x \in \mathbb{R}^n : |M_{\mathbb{H}}f(x) - \frac{1}{\Omega_Q |x|_h^Q} \|f\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}| > \lambda\}) = 0.$

本文结构如下: 第 2 节证明定理 1.1 和 1.2, 而定理 1.3 和 1.4 的证明则分别在第 3 和 4 节中给出.

为方便起见, 在后文中用字母 C 表示一个与本质变量无关的正常数, 但在不同的位置其值可以不同.

2 定理 1.1 和 1.2 的证明

在证明定理 1.1 之前, 我们先给出如下引理.

引理 2.1 设 $0 \leq \beta < \alpha$ 和 $q = \alpha/(\alpha - \beta)$. 对于固定的 $\lambda > 0$, 有

$$\lambda^q m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} > \lambda\right\}\right) = \frac{1}{\alpha} \|\Omega\|_q^q.$$

证明 对于固定的 $\lambda > 0$, 有

$$\begin{aligned} m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} > \lambda\right\}\right) &= m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x)^{\alpha-\beta} < \frac{|\Omega(x)|}{\lambda}\right\}\right) \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_0^{(\frac{|\Omega(x)|}{\lambda})^{\frac{1}{\alpha-\beta}}} \rho^{\alpha-1} d\rho J(x') d\sigma(x') \\ &= \frac{1}{\alpha \lambda^q} \|\Omega\|_q^q. \end{aligned}$$

证明完毕. $\square$

定理 1.1 的证明 不失一般性, 设 $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$. 定义 $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(y - x) < r\}$ 是中心为 x 、半径为 r 的椭圆. 对于任意的 $0 < \varepsilon \ll 1$, 存在 r_ε 使得

$$\int_{\rho(x) < r_\varepsilon} f(x) dx > 1 - \varepsilon.$$

记 $f = f_1 + f_2$, 其中 $f_1(x) := f\chi_{B(0, r_\varepsilon)}(x)$. 注意到

$$\|f_1\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} > 1 - \varepsilon, \quad \text{以及} \quad \|f_2\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon.$$

对于 $\lambda > 0$, 定义下面的集合:

$$E_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\Omega, \beta}^\alpha f(x)| > \lambda\}, \quad E_\lambda^1 := \{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\Omega, \beta}^\alpha f_1(x)| > \lambda\}, \quad E_\lambda^2 := \{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\Omega, \beta}^\alpha f_2(x)| > \lambda\}.$$

选择足够小的 $0 < \delta \ll 1$ 且满足当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时 $\varepsilon/\delta \rightarrow 0$. 由 $T_{\Omega, \beta}^\alpha$ 是线性算子易知,

$$E_\lambda \subseteq E_{(1-\delta)\lambda}^1 \cup E_{\delta\lambda}^2 \quad \text{和} \quad E_{(1+\delta)\lambda}^1 \subseteq E_\lambda \cup E_{\delta\lambda}^2.$$

从而,

$$m(E_{(1+\delta)\lambda}^1) - m(E_{\delta\lambda}^2) \leq m(E_\lambda) \leq m(E_{(1-\delta)\lambda}^1) + m(E_{\delta\lambda}^2).$$

而由 $T_{\Omega, \beta}^\alpha$ 的弱型 $(1, q)$ 有界性得

$$m(E_{\delta\lambda}^2) \leq \left(\frac{C}{\delta\lambda} \|f_2\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right)^q \leq \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q.$$

因此,

$$m(E_{(1+\delta)\lambda}^1) - \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q \leq m(E_\lambda) \leq m(E_{(1-\delta)\lambda}^1) + \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q. \quad (2.1)$$

下面分别对 $m(E_{(1+\delta)\lambda}^1)$ 和 $m(E_{(1-\delta)\lambda}^1)$ 进行估计. 记

$$I_1(x) := \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} f_1(y) dy \right|, \quad I_2(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}} - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} \right| f_1(y) dy.$$

利用三角不等式, 可得

$$I_1(x) - I_2(x) \leq |T_{\Omega, \beta}^\alpha f_1(x)| \leq I_1(x) + I_2(x). \quad (2.2)$$

因此,

$$m(E_{(1-\delta)\lambda}^1) \leq m(\{x \in \mathbb{R}^n : I_2(x) > 2\delta\lambda\}) + m(\{x \in \mathbb{R}^n : I_1(x) > (1-3\delta)\lambda\}).$$

设 $R_\varepsilon := (1 + 1/\varepsilon)r_\varepsilon$. 定义集合

$$G_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, I_2(x) > \lambda\}.$$

由引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned} m(E_{(1-\delta)\lambda}^1) &\leq m(G_{2\delta\lambda}) + m(\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) \leq R_\varepsilon, |T_{\Omega, \beta}^\alpha f_1(x)| > (1-\delta)\lambda\}) \\ &\quad + m(\{x \in \mathbb{R}^n : I_1(x) > (1-3\delta)\lambda\}) \\ &\leq m(G_{2\delta\lambda}) + \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha} \int_{S^{n-1}} J(x') d\sigma(x') + \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha(1-3\delta)^q \lambda^q}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

注意到

$$\left| \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}} - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} \right| \leq \frac{|\Omega(x-y) - \Omega(x)|}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}} + |\Omega(x)| \left| \frac{1}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}} - \frac{1}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} \right|.$$

记

$$G_{\lambda}^1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_{\varepsilon}, \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x-y) - \Omega(x)|}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}} f_1(y) dy > \lambda \right\},$$

$$G_{\lambda}^2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_{\varepsilon}, \int_{\mathbb{R}^n} |\Omega(x)| \left| \frac{1}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}} - \frac{1}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} \right| f_1(y) dy > \lambda \right\},$$

则

$$m(G_{2\delta\lambda}) \leq m(G_{\delta\lambda}^1) + m(G_{\delta\lambda}^2).$$

首先估计 $m(G_{\delta\lambda}^1)$. 因为 $\rho(x) > R_{\varepsilon}$, $\rho(y) < r_{\varepsilon}$, 所以有

$$\rho(x-y) \geq \rho(x) - \rho(y) > \frac{\rho(x)}{1+\varepsilon}, \quad \text{以及} \quad \frac{r_{\varepsilon}}{R_{\varepsilon}} < \varepsilon.$$

注意到 $\rho(x) < 1$ 时, $|x| < \rho(x)$. 那么, $|A_{\rho^{-1}}y| < \rho(A_{\rho^{-1}}y) = \rho(y)/\rho$. 利用变量替换 $s := \rho(y)/\rho$, 可得

$$\begin{aligned} m(G_{\delta\lambda}^1) &\leq \frac{1}{\delta\lambda} \int_{\rho(x) > R_{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x-y) - \Omega(x)|}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}} f_1(y) dy dx \\ &\leq \frac{(\varepsilon+1)^{\alpha-\beta}}{\delta\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|x| > R_{\varepsilon}} \frac{|\Omega(x-y) - \Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} dx f_1(y) dy \\ &\leq \frac{C}{\delta\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{R_{\varepsilon}}^{\infty} \int_{S^{n-1}} \frac{|\Omega(x' - A_{\rho^{-1}}y) - \Omega(x')|}{\rho^{1-\beta}} d\sigma(x') d\rho f_1(y) dy \\ &\leq \frac{C}{\delta\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{R_{\varepsilon}}^{\infty} \frac{\omega_1(\rho(y)/\rho)}{\rho^{1-\beta}} d\rho f_1(y) d(y) \\ &\leq \frac{Cr_{\varepsilon}^{\beta}}{\delta\lambda} \int_0^{r_{\varepsilon}/R_{\varepsilon}} \frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}} ds \\ &\leq \frac{Cr_{\varepsilon}^{\beta}}{\delta\lambda} \int_0^{\varepsilon} \frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}} ds. \end{aligned}$$

接下来估计 $m(G_{\delta\lambda}^2)$. 由文献 [2, 引理 3.2] 知, 对于 $\rho(x) > R_{\varepsilon}$, $\rho(y) < r_{\varepsilon}$, 有

$$\left| \frac{1}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}} - \frac{1}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} \right| \leq C \frac{\rho(y)}{\rho(x)^{\alpha-\beta+1}}. \quad (2.4)$$

由此可得

$$\begin{aligned} m(G_{\delta\lambda}^2) &\leq m\left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_{\varepsilon}, C \int_{\mathbb{R}^n} |\Omega(x)| \frac{\rho(y)}{\rho(x)^{\alpha-\beta+1}} f_1(y) dy > \delta\lambda \right\}\right) \\ &\leq \frac{C}{\delta^q \lambda^q} \int_{\rho(x) > R_{\varepsilon}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Omega(x)| \frac{\rho(y)}{\rho(x)^{\alpha-\beta+1}} f_1(y) dy \right)^q dx \\ &\leq \frac{Cr_{\varepsilon}^q}{\delta^q \lambda^q} \int_{\rho(x) > R_{\varepsilon}} \frac{|\Omega(x)|^q}{\rho(x)^{(\alpha-\beta+1)q}} dx \\ &\leq \frac{Cr_{\varepsilon}^q}{\delta^q \lambda^q} \int_{S^{n-1}} |\Omega(x')|^q \int_{R_{\varepsilon}}^{\infty} \frac{1}{\rho^{q+1}} d\rho J(x') d\sigma(x') \\ &\leq \frac{Cr_{\varepsilon}^q}{\delta^q \lambda^q R_{\varepsilon}^q} \|\Omega\|_q^q \leq \frac{C\varepsilon^q}{\delta^q \lambda^q} \|\Omega\|_q^q. \end{aligned}$$

结合 $m(G_{\delta\lambda}^1)$ 和 $m(G_{\delta\lambda}^2)$ 的估计, 可得

$$m(G_{2\delta\lambda}) \leq \frac{Cr_\varepsilon^\beta}{\delta\lambda} \int_0^\varepsilon \frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}} ds + \frac{C\varepsilon^q}{\delta^q\lambda^q} \|\Omega\|_q^q. \quad (2.5)$$

再由 (2.1) 和 (2.3) 可知,

$$\begin{aligned} m(E_\lambda) &\leq m(G_{2\delta\lambda}) + \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha} \int_{S^{n-1}} J(x') d\sigma(x') + \frac{\|\Omega\|_q^q}{n(1-3\delta)^q\lambda^q} + \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q \\ &\leq \frac{Cr_\varepsilon^\beta}{\delta\lambda} \int_0^\varepsilon \frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}} ds + \frac{C\varepsilon^q}{\delta^q\lambda^q} \|\Omega\|_q^q + \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha} \int_{S^{n-1}} J(x') d\sigma(x') + \frac{\|\Omega\|_q^q}{n(1-3\delta)^q\lambda^q} + \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q. \end{aligned}$$

注意到, 当 $\varepsilon \rightarrow 0+$ 时, $\int_0^\varepsilon \frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}} ds \rightarrow 0$. 令 $\lambda \rightarrow 0+$, $\varepsilon \rightarrow 0+$, 再由 δ 的任意性, 可得

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^q m(E_\lambda) \leq \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha}. \quad (2.6)$$

另一方面,

$$m(E_{(1+\delta)\lambda}^1) \geq m(\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, |T_{\Omega,\beta}^\alpha f_1(x)| > (1+\delta)\lambda\}).$$

利用 (2.2) 和引理 2.1, 有

$$\begin{aligned} &m(\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, |T_{\Omega,\beta}^\alpha f_1(x)| > (1+\delta)\lambda\}) \\ &\geq m(\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, I_1(x) > (1+3\delta)\lambda\}) - m(G_{2\delta\lambda}) \\ &\geq m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\Omega(x)|(1-\varepsilon)}{\rho(x)^{n-\alpha}} > (1+3\delta)\lambda\right\}\right) - \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha} \int_{S^{n-1}} J(x') d\sigma(x') - m(G_{2\delta\lambda}) \\ &\geq \frac{\|\Omega\|_q^q(1-\varepsilon)^q}{\alpha(1+3\delta)^q\lambda^q} - \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha} \int_{S^{n-1}} J(x') d\sigma(x') - m(G_{2\delta\lambda}). \end{aligned}$$

由此并结合估计 (2.5), 令 $\lambda \rightarrow 0+$, $\varepsilon \rightarrow 0+$ 和 $\delta \rightarrow 0+$, 可得

$$\underline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^q m(E_\lambda) \geq \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha}. \quad (2.7)$$

于是, $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^q m(E_\lambda) = \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha}$. 这就完成了定理中 (i) 的证明.

接下来证明 (ii). 为了方便起见, 对于 $\lambda > 0$, 设

$$\begin{aligned} H_\lambda &:= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|T_{\Omega,\beta}^\alpha f(x) - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right| > \lambda\right\}, \\ H_\lambda^1 &:= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, \left|T_{\Omega,\beta}^\alpha f_1(x) - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right| > \lambda\right\}. \end{aligned}$$

只需证 $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^q m(H_\lambda) = 0$. 因为 $T_{\Omega,\beta}^\alpha$ 是线性的, 所以有

$$\begin{aligned} m(H_\lambda) &\leq m(H_{(1-\delta)\lambda}^1) + m(\mathbb{R}^n \setminus H_{(1-\delta)\lambda}^1) + m(\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\Omega,\beta}^\alpha f_2(x)| > \delta\lambda\}) \\ &\leq m(H_{(1-\delta)\lambda}^1) + \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha} \int_{S^{n-1}} J(x') d\sigma(x') + \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q. \end{aligned}$$

下面估计 $m(H_{(1-\delta)\lambda}^1)$. 前面已经假定 $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$, 注意到

$$\left|T_{\Omega,\beta}^\alpha f_1(x) - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}} - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right| f_1(y) dy + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} f_2(y) dy. \quad (2.8)$$

由 (2.8)、(2.5) 和引理 2.1 得

$$\begin{aligned} m(H_{(1-\delta)\lambda}^1) &\leq m(G_{2\delta\lambda}) + m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > R_\varepsilon, \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} f_2(y) dy > (1-3\delta)\lambda\right\}\right) \\ &\leq \frac{Cr_\varepsilon^\beta}{\delta\lambda} \int_0^\varepsilon \frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}} ds + \frac{C\varepsilon^q}{\delta^q \lambda^q} \|\Omega\|_q^q + \frac{\|\Omega\|_q^q \varepsilon^q}{\alpha(1-3\delta)^q \lambda^q}. \end{aligned}$$

因此,

$$m(H_\lambda) \leq \frac{Cr_\varepsilon^\beta}{\delta\lambda} \int_0^\varepsilon \frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}} ds + \frac{C\varepsilon^q}{\delta^q \lambda^q} \|\Omega\|_q^q + \frac{\|\Omega\|_q^q \varepsilon^q}{\alpha(1-3\delta)^q \lambda^q} + \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha} \int_{S^{n-1}} J(x') d\sigma(x') + \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q. \quad (2.9)$$

令 $\lambda \rightarrow 0+$ 和 $\varepsilon \rightarrow 0+$, 可得 $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^q m(H_\lambda) = 0$. 定理 1.1 证毕. $\square$

注 2.1 我们指出定理 1.1 中的结论 (ii) 比结论 (i) 更强.

事实上, 假定 (ii) 成立. 对于 $0 < \eta < 1$, 令 H_λ 如定理 1.1 中 (ii) 证明中所设. 由引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned} m(\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\Omega,\beta}^\alpha f(x)| > \lambda\}) &\leq m(H_{\eta\lambda}) + m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} > (1-\eta)\lambda\right\}\right) \\ &= m(H_{\eta\lambda}) + \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha(1-\eta)^q \lambda^q}. \end{aligned}$$

类似于 (2.9) 的估计, 可知 $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^q m(H_{\eta\lambda}) \rightarrow 0$. 此外, 令 $\eta \rightarrow 0+$, 则有

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^q m(\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\Omega,\beta}^\alpha f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha}. \quad (2.10)$$

另一方面, 再次利用引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned} m(\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\Omega,\beta}^\alpha f(x)| > \lambda\}) &\geq m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} > (1+\eta)\lambda\right\}\right) - m(H_{\eta\lambda}) \\ &= \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha(1+\eta)^q \lambda^q} - m(H_{\eta\lambda}). \end{aligned}$$

令 $\lambda \rightarrow 0+$ 和 $\eta \rightarrow 0+$, 可得

$$\underline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^q m(\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\Omega,\beta}^\alpha f(x)| > \lambda\}) \geq \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha}. \quad (2.11)$$

由 (2.10) 和 (2.11) 可知 (i) 成立.

定理 1.2 的证明 定理 1.2 的证明类似于定理 1.1. 我们仅给出证明过程中需要变动之处, 其他细节不再详述. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 令 R_ε 、 r_ε 和 f_1 如定理 1.1 证明中所设. 注意到对 $\rho(x) > R_\varepsilon$, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_{\rho(x-y) > \varepsilon} \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha} f_1(y) dy \right| &\leq \int_{\rho(x-y) > \varepsilon} \left| \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha} - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha} \right| f_1(y) dy + \left| \int_{\rho(x-y) > \varepsilon} \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha} f_1(y) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha} - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha} \right| f_1(y) dy + \frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^\alpha}. \end{aligned}$$

此外,

$$\left| \int_{\rho(x-y) > \varepsilon} \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha} f_1(y) dy \right| \geq \left| \int_{\rho(x-y) > \varepsilon} \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha} f_1(y) dy \right| - \int_{\rho(x-y) > \varepsilon} \left| \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha} - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha} \right| f_1(y) dy$$

$$\geq \left| \int_{\rho(x-y) > \varepsilon} \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha} f_1(y) dy \right| - \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha} - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha} \right| f_1(y) dy.$$

因此,

$$\begin{aligned} |T_{\Omega}^{\alpha,*} f_1(x)| &\geq \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{\rho(x-y) > \varepsilon} \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha} f_1(y) dy \right| - \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha} - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha} \right| f_1(y) dy \\ &\geq \frac{|\Omega(x)|(1-\varepsilon)}{\rho(x)^\alpha} - \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha} - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha} \right| f_1(y) dy. \end{aligned}$$

结合可得

$$\begin{aligned} \frac{|\Omega(x)|(1-\varepsilon)}{\rho(x)^\alpha} - \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha} - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha} \right| f_1(y) dy &\leq |T_{\Omega}^{\alpha,*} f_1(x)| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^\alpha} - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^\alpha} \right| f_1(y) dy + \frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^\alpha}. \end{aligned}$$

仿照定理 1.1 的证明可证得定理 1.2. $\square$

3 定理 1.3 的证明

定理 1.3 的证明 类似于定理 1.1 的证明, 不妨设 $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$, 并借用定理 1.1 证明中的记号 ε 、 r_ε 、 δ 、 f_1 、 f_2 和 R_ε . 对于任意给定的 $\lambda > 0$, 记

$$F_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : |\mu_{\Omega,\beta}^\alpha f(x)| > \lambda\}, \quad F_\lambda^1 := \{x \in \mathbb{R}^n : |\mu_{\Omega,\beta}^\alpha f_1(x)| > \lambda\}, \quad F_\lambda^2 := \{x \in \mathbb{R}^n : |\mu_{\Omega,\beta}^\alpha f_2(x)| > \lambda\}.$$

由于 $\mu_{\Omega,\beta}^\alpha$ 是次线性的, 所以有

$$F_{(1+\delta)\lambda}^1 \subseteq F_\lambda \cup F_{\delta\lambda}^2, \quad F_\lambda \subseteq F_{(1-\delta)\lambda}^1 \cup F_{\delta\lambda}^2.$$

因此,

$$m(F_{(1+\delta)\lambda}^1) - m(F_{\delta\lambda}^2) \leq m(F_\lambda) \leq m(F_{(1-\delta)\lambda}^1) + m(F_{\delta\lambda}^2). \quad (3.1)$$

注意到算子 $\mu_{\Omega,\beta}^\alpha$ 是弱型 $(1, q)$ 有界, 则

$$m(F_{\delta\lambda}^2) \leq \left(\frac{C}{\delta\lambda} \|f_2\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right)^q \leq \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda} \right)^q.$$

结合 (3.1) 可知,

$$m(F_{(1+\delta)\lambda}^1) - \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda} \right)^q \leq m(F_\lambda) \leq m(F_{(1-\delta)\lambda}^1) + \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda} \right)^q. \quad (3.2)$$

为了估计 $m(F_{(1-\delta)\lambda}^1)$ 和 $m(F_{(1+\delta)\lambda}^1)$, 我们将 $\mu_{\Omega,\beta}^\alpha f_1$ 分解成下面的四部分:

$$\begin{aligned} |\mu_{\Omega,\beta}^\alpha f_1(x)| &\leq \left(\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\Omega(x-y)}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta-1}} - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta-1}} \right| \chi_{\{y:\rho(x-y) \leq t\}}(y) |f_1(y)| dy \right)^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\Omega(x)}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta-1}} - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta-1}} \right| \chi_{\{y:\rho(x-y) \leq t\}}(y) |f_1(y)| dy \right)^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta-1}} \left(\chi_{\{y:\rho(x-y) \leq t\}}(y) - \chi_{\{x:\rho(x) \leq t\}}(x) \right) \right| |f_1(y)| dy \right)^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_0^\infty \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta-1}} \chi_{\{x:\rho(x) \leq t\}}(x) f_1(y) d(y) \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2} \\
& =: J_1(x) + J_2(x) + J_3(x) + J_4(x).
\end{aligned}$$

易知

$$J_4(x) - J_3(x) - J_2(x) - J_1(x) \leq |\mu_{\Omega,\beta}^\alpha f_1(x)| \leq J_1(x) + J_2(x) + J_3(x) + J_4(x). \quad (3.3)$$

对于 $\rho(x) > R_\varepsilon$, 设

$$K_\lambda^1 := \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, J_1(x) + J_2(x) + J_3(x) > \lambda\}.$$

由 (3.3) 和引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned}
m(F_{(1-\delta)\lambda}^1) & \leq m(K_{3\delta\lambda}^1) + m(\{x \in \mathbb{R}^n : J_4(x) > (1-4\delta)\lambda\}) + m(\mathbb{R}^n \setminus K_{3\delta\lambda}^1) \\
& \leq m(K_{3\delta\lambda}^1) + m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} > \sqrt{2}(1-4\delta)\lambda\right\}\right) + \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha} \int_{S^{n-1}} J(x') d\sigma(x') \\
& \leq m(K_{3\delta\lambda}^1) + \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha 2^{q/2} (1-4\delta)^q \lambda^q} + \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha} \int_{S^{n-1}} J(x') d\sigma(x'). \quad (3.4)
\end{aligned}$$

下面来估计 $m(K_{3\delta\lambda}^1)$. 记

$$L_\lambda^1 := \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, J_1(x) > \lambda\}, \quad L_\lambda^2 := \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, J_2(x) > \lambda\}$$

和

$$L_\lambda^3 := \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, J_3(x) > \lambda\}.$$

显然,

$$m(K_{3\delta\lambda}^1) \leq m(L_{\delta\lambda}^1) + m(L_{\delta\lambda}^2) + m(L_{\delta\lambda}^3).$$

对于 $m(L_{\delta\lambda}^1)$, 由 Minkowski 不等式, 再参照定理 1.1 中对 $m(G_{\delta\lambda}^1)$ 的估计, 可得

$$\begin{aligned}
m(L_{\delta\lambda}^1) & \leq m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x-y) - \Omega(x)|}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta-1}} f_1(y) \left(\int_{\rho(x-y)}^\infty \frac{dr}{r^3}\right)^{1/2} dy > \delta\lambda\right\}\right) \\
& \leq \frac{C}{\delta\lambda} \int_{\rho(x) > R_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x-y) - \Omega(x)|}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta}} f_1(y) dy dx \\
& \leq \frac{C}{\delta\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{R_\varepsilon}^\infty \int_{S^{n-1}} \frac{|\Omega(x' - A_{\rho^{-1}} y) - \Omega(x')|}{\rho^{1-\beta}} d\sigma(x') d\rho f_1(y) dy \\
& \leq \frac{Cr_\varepsilon^\beta}{\delta\lambda} \int_0^\varepsilon \frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}} ds.
\end{aligned}$$

当 $\alpha - \beta - 1 > 0$ 时, 对于 $\rho(x) > R_\varepsilon, \rho(y) < r_\varepsilon$, 由文献 [2, 引理 3.2] 知,

$$\left| \frac{1}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta-1}} - \frac{1}{\rho(x)^{\alpha-\beta-1}} \right| \leq C \frac{\rho(y)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}.$$

当 $-1 < \alpha - \beta - 1 \leq 0$ 时, 对于 $\rho(x) > R_\varepsilon, \rho(y) < r_\varepsilon$, 有

$$\frac{\rho(x)}{2} \leq \frac{\rho(x)}{1+\varepsilon} \leq \rho(x-y) \leq \frac{\rho(x)(1+2\varepsilon)}{1+\varepsilon} \leq \frac{3\rho(x)}{2}.$$

再次利用文献 [2, 引理 3.2] 得到

$$\left| \frac{1}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta-1}} - \frac{1}{\rho(x)^{\alpha-\beta-1}} \right| \leq \frac{C\rho(y)\rho(x)^{\alpha-\beta-2}}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta-1}\rho(x)^{\alpha-\beta-1}} \leq C \frac{\rho(y)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}.$$

综合以上两种情形, 有

$$\left| \frac{1}{\rho(x-y)^{\alpha-\beta-1}} - \frac{1}{\rho(x)^{\alpha-\beta-1}} \right| \leq C \frac{\rho(y)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}}.$$

对于 $m(L_{\delta\lambda}^2)$, 由 Minkowski 不等式, 可得

$$\begin{aligned} m(L_{\delta\lambda}^2) &\leq m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C\rho(y)|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta+1}} f_1(y) dy > \delta\lambda\right\}\right) \\ &\leq m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, \left(\frac{Cr_\varepsilon|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta+1}}\right)^q > \delta^q\lambda^q\right\}\right) \\ &\leq \frac{Cr_\varepsilon^q}{\delta^q\lambda^q} \int_{\rho(x)>R_\varepsilon} \frac{|\Omega(x)|^q}{\rho(x)^{(\alpha-\beta+1)q}} dx \\ &\leq \frac{Cr_\varepsilon^q}{\delta^q\lambda^q} \int_{S^{n-1}} |\Omega(x')|^q \int_{R_\varepsilon}^\infty \frac{1}{\rho^{q+1}} d\rho J(x') d\sigma(x') \\ &\leq \frac{C\varepsilon^q \|\Omega\|_q^q}{\delta^q\lambda^q}. \end{aligned}$$

最后来估计 $m(L_{\delta\lambda}^3)$. 对于 $\rho(x) > R_\varepsilon$, $\rho(y) < r_\varepsilon$, 有

$$\begin{aligned} J_3(x) &\leq \left(\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta-1}} \chi_{\{t:\rho(x)-\rho(y)<t<\rho(x)+\rho(y)\}}(t) f_1(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2} \right. \\ &\leq \frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta-1}} \left(\int_{\rho(x)-r_\varepsilon}^{\rho(x)+r_\varepsilon} \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2} \leq \frac{C|\Omega(x)|r_\varepsilon^{1/2}}{\rho(x)^{\alpha-\beta+1/2}}. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} m(L_{\delta\lambda}^3) &\leq m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, \frac{C|\Omega(x)|^q r_\varepsilon^{q/2}}{\rho(x)^{(\alpha-\beta+1/2)q}} > \delta^q\lambda^q\right\}\right) \\ &\leq \frac{Cr_\varepsilon^{q/2}}{\delta^q\lambda^q} \int_{S^{n-1}} |\Omega(x')|^q \int_{R_\varepsilon}^\infty \frac{1}{\rho^{1+q/2}} d\rho J(x') d\sigma(x') \\ &\leq \frac{C\|\Omega\|_q^q \varepsilon^{q/2}}{\delta^q\lambda^q}. \end{aligned}$$

结合 $m(L_{\delta\lambda}^1)$ 、 $m(L_{\delta\lambda}^2)$ 和 $m(L_{\delta\lambda}^3)$ 的估计, 可得

$$m(K_{3\delta\lambda}^1) \leq \frac{Cr_\varepsilon^\beta}{\delta\lambda} \int_0^\varepsilon \frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}} ds + \frac{C\varepsilon^q \|\Omega\|_q^q}{\delta^q\lambda^q} + \frac{C\|\Omega\|_q^q \varepsilon^{q/2}}{\delta^q\lambda^q}. \quad (3.5)$$

由 (3.2)、(3.4) 和 (3.5), 有

$$\begin{aligned} m(F_\lambda) &\leq m(K_{3\delta\lambda}^1) + \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha 2^{q/2} (1-4\delta)^q \lambda^q} + \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha} \int_{S^{n-1}} J(x') d\sigma(x') + \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda} \right)^q \\ &\leq \frac{Cr_\varepsilon^\beta}{\delta\lambda} \int_0^\varepsilon \frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}} ds + \frac{C\varepsilon^q \|\Omega\|_q^q}{\delta^q\lambda^q} + \frac{C\|\Omega\|_q^q \varepsilon^{q/2}}{\delta^q\lambda^q} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha 2^{q/2} (1-4\delta)^q \lambda^q} + \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha} \int_{S^{n-1}} J(x') d\sigma(x') + \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda} \right)^q.$$

令 $\lambda \rightarrow 0+$, $\varepsilon \rightarrow 0+$ 和 $\delta \rightarrow 0+$, 可知

$$\varlimsup_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^q m(F_\lambda) \leq \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha 2^{q/2}}. \quad (3.6)$$

另一方面,

$$m(F_{(1+\delta)\lambda}^1) \geq m(\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, |\mu_{\Omega, \beta}^\alpha f_1(x)| > (1+\delta)\lambda\}).$$

由 (3.3)、 $\|f_1\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} > 1 - \varepsilon$ 和引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned} m(F_{(1+\delta)\lambda}^1) &\geq m(\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, J_4(x) > (1+4\delta)\lambda\}) - m(K_{3\delta\lambda}^1) \\ &\geq m(\{x \in \mathbb{R}^n : J_4(x) > (1+4\delta)\lambda\}) - m(K_{3\delta\lambda}^1) \\ &\quad - m(\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) \leq R_\varepsilon, J_4(x) > (1+4\delta)\lambda\}) \\ &\geq m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{|\Omega(x)|}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} > \frac{\sqrt{2}(1+4\delta)\lambda}{1-\varepsilon}\right\}\right) - \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha} \int_{S^{n-1}} J(x') d\sigma(x') - m(K_{3\delta\lambda}^1) \\ &= \frac{(1-\varepsilon)^q \|\Omega\|_q^q}{\alpha 2^{q/2} (1+4\delta)^q} - \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha} \int_{S^{n-1}} J(x') d\sigma(x') - m(K_{3\delta\lambda}^1). \end{aligned}$$

由 (3.2) 和 (3.5), 有

$$\begin{aligned} m(F_\lambda) &\geq m(\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, |\mu_{\Omega, \beta}^\alpha f_1(x)| > (1+\delta)\lambda\}) - \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda} \right)^q \\ &\geq \frac{(1-\varepsilon)^q \|\Omega\|_q^q}{\alpha 2^{q/2} (1+4\delta)^q} - \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha} \int_{S^{n-1}} J(x') d\sigma(x') - \frac{Cr_\varepsilon^\beta}{\delta\lambda} \int_0^\varepsilon \frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}} ds \\ &\quad - \frac{C\varepsilon^q \|\Omega\|_q^q}{\delta^q \lambda^q} - \frac{C\|\Omega\|_q^q \varepsilon^{q/2}}{\delta^q \lambda^q} - \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda} \right)^q. \end{aligned}$$

令 $\lambda \rightarrow 0+$, $\varepsilon \rightarrow 0+$ 和 $\delta \rightarrow 0+$, 则有

$$\varliminf_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^q m(F_\lambda) \geq \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha 2^{q/2}}. \quad (3.7)$$

结合 (3.6) 和 (3.7), 可得

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^q m(F_\lambda) = \frac{\|\Omega\|_q^q}{\alpha 2^{q/2}}.$$

这就完成了定理 1.3 中 (i) 的证明.

下面来证明 (ii). 对于 $\lambda > 0$, 设

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\lambda &:= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| \mu_{\Omega, \beta}^\alpha f(x) - \frac{|\Omega(x)|}{\sqrt{2}\rho(x)^{\alpha-\beta}} \right| > \lambda \right\}, \\ \tilde{H}_\lambda^1 &:= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, \left| \mu_{\Omega, \beta}^\alpha f_1(x) - \frac{|\Omega(x)|}{\sqrt{2}\rho(x)^{\alpha-\beta}} \right| > \lambda \right\}. \end{aligned}$$

由算子 $\mu_{\Omega,\beta}^\alpha$ 的次线性性和 (3.3), 可以得到

$$\begin{aligned} \left| \mu_{\Omega,\beta}^\alpha f(x) - \frac{|\Omega(x)|}{\sqrt{2}\rho(x)^{\alpha-\beta}} \right| &\leq \mu_{\Omega,\beta}^\alpha f_2(x) + \left| \mu_{\Omega,\beta}^\alpha f_1(x) - \frac{|\Omega(x)|}{\sqrt{2}\rho(x)^{\alpha-\beta}} \right| \\ &\leq \mu_{\Omega,\beta}^\alpha f_2(x) + J_1(x) + J_2(x) + J_3(x) + \left| J_4(x) - \frac{|\Omega(x)|}{\sqrt{2}\rho(x)^{\alpha-\beta}} \right|. \end{aligned}$$

再结合引理 2.1 和 (3.5) 推出

$$\begin{aligned} m(\tilde{H}_\lambda) &\leq m(\tilde{H}_{(1-\delta)\lambda}^1) + m(\{x \in \mathbb{R}^n : \mu_{\Omega,\beta}^\alpha f_2(x) > \delta\lambda\}) + m(\mathbb{R}^n \setminus \tilde{H}_{(1-\delta)\lambda}^1) \\ &\leq m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > R_\varepsilon, \left|J_4(x) - \frac{|\Omega(x)|}{\sqrt{2}\rho(x)^{\alpha-\beta}}\right| > (1-4\delta)\lambda\right\}\right) + m(K_{3\delta\lambda}^1) \\ &\quad + \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q + \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha} \int_{S^{n-1}} J(x') d\sigma(x') \\ &\leq m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{\varepsilon|\Omega(x)|}{\sqrt{2}\rho(x)^{\alpha-\beta}} > (1-4\delta)\lambda\right\}\right) + m(K_{3\delta\lambda}^1) + \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q + \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha} \int_{S^{n-1}} J(x') d\sigma(x') \\ &\leq \frac{\varepsilon^q \|\Omega\|_q^q}{\alpha^{2q/2}(1-4\delta)^q \lambda^q} + \frac{Cr_\varepsilon^\beta}{\delta\lambda} \int_0^\varepsilon \frac{\omega_1(s)}{s^{1+\beta}} ds + \frac{C\varepsilon^q \|\Omega\|_q^q}{\delta^q \lambda^q} + \frac{C\|\Omega\|_q^q \varepsilon^{q/2}}{\delta^q \lambda^q} \\ &\quad + \left(\frac{C\varepsilon}{\delta\lambda}\right)^q + \frac{R_\varepsilon^\alpha}{\alpha} \int_{S^{n-1}} J(x') d\sigma(x'). \end{aligned}$$

令 $\lambda \rightarrow 0+$, $\varepsilon \rightarrow 0+$ 和 $\delta \rightarrow 0+$, 可知 $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^q m(\tilde{H}_\lambda) = 0$. 定理 1.3 证毕. $\square$

注 3.1 类似于注 2.1, 我们容易验证定理 1.3 中的结论 (ii) 比结论 (i) 更强.

4 定理 1.4 的证明

定理 1.4 的证明 不失一般性, 设 $\|f\|_{L^1(\mathbb{H}^n)} = 1$. 对于任意的 $0 < \varepsilon \ll 1$, 存在 r_ε 使得

$$\int_{|x|_h < r_\varepsilon} |f(x)| dx > 1 - \varepsilon.$$

记 $f(x) = f_1(x) + f_2(x) := f\chi_{\{|x|_h < r_\varepsilon\}}(x) + f\chi_{\{|x|_h \geq r_\varepsilon\}}(x)$. 注意到

$$\|f_1\|_{L^1(\mathbb{H}^n)} > 1 - \varepsilon, \quad \|f_2\|_{L^1(\mathbb{H}^n)} \leq \varepsilon.$$

对于 $\lambda > 0$, 定义下面的集合:

$$\tilde{E}_\lambda := \{x \in \mathbb{H}^n : |M_{\mathbb{H}} f(x)| > \lambda\}, \quad \tilde{E}_\lambda^1 := \{x \in \mathbb{H}^n : |M_{\mathbb{H}} f_1(x)| > \lambda\}, \quad \tilde{E}_\lambda^2 := \{x \in \mathbb{H}^n : |M_{\mathbb{H}} f_2(x)| > \lambda\}.$$

注意到 $\tilde{E}_\lambda \subseteq \tilde{E}_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda}^1 \cup \tilde{E}_{\sqrt{\varepsilon}\lambda}^2$ 且 $\tilde{E}_{(1+\sqrt{\varepsilon})\lambda}^1 \subseteq \tilde{E}_\lambda \cup \tilde{E}_{\sqrt{\varepsilon}\lambda}^2$, 则

$$m(\tilde{E}_{(1+\sqrt{\varepsilon})\lambda}^1) - m(\tilde{E}_{\sqrt{\varepsilon}\lambda}^2) \leq m(\tilde{E}_\lambda) \leq m(\tilde{E}_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda}^1) + m(\tilde{E}_{\sqrt{\varepsilon}\lambda}^2). \quad (4.1)$$

因为 Hardy-Littlewood 极大算子 $M_{\mathbb{H}}$ 从 $L^1(\mathbb{H}^n)$ 到 $L^{1,\infty}(\mathbb{H}^n)$ 有界, 所以,

$$m(\tilde{E}_{\sqrt{\varepsilon}\lambda}^2) \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}\lambda} \|f_2\|_{L^1(\mathbb{H}^n)} \leq \frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}.$$

再结合 (4.1), 有

$$m(\tilde{E}_{(1+\sqrt{\varepsilon})\lambda}^1) - \frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} \leq m(\tilde{E}_\lambda) \leq m(\tilde{E}_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda}^1) + \frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}. \quad (4.2)$$

接下来估计 $m(\tilde{E}_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda}^1)$. 设 $R_\varepsilon := (1 + 1/\varepsilon)r_\varepsilon$. 对于 $|x|_h > R_\varepsilon$, 易知

$$\frac{1-\varepsilon}{m(\mathbb{B}(x, |x|_h + r_\varepsilon))} \leq M_{\mathbb{H}} f_1(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(\mathbb{B}(x, r))} \int_{\mathbb{B}(x, r)} |f_1(y)| dy \leq \frac{1}{m(\mathbb{B}(x, |x|_h - r_\varepsilon))}. \quad (4.3)$$

由 (4.3) 和 $|x|_h - r_\varepsilon > |x|_h/(1+\varepsilon)$, 有

$$\begin{aligned} m(\tilde{E}_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda}^1) &\leq m\left(\left\{x \in \mathbb{H}^n : |x|_h > R_\varepsilon, \frac{1}{m(\mathbb{B}(x, |x|_h - r_\varepsilon))} > (1 - \sqrt{\varepsilon})\lambda\right\}\right) + \Omega_Q R_\varepsilon^Q \\ &\leq m\left(\left\{x \in \mathbb{H}^n : |x|_h > R_\varepsilon, \frac{1}{m(\mathbb{B}(x, |x|_h/(1+\varepsilon)))} > (1 - \sqrt{\varepsilon})\lambda\right\}\right) + \Omega_Q R_\varepsilon^Q \\ &\leq m\left(\left\{x \in \mathbb{H}^n : \frac{(1+\varepsilon)^Q}{\Omega_Q |x|_h^Q} > (1 - \sqrt{\varepsilon})\lambda\right\}\right) + \Omega_Q R_\varepsilon^Q \\ &= \frac{(\varepsilon+1)^Q}{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda} + \Omega_Q R_\varepsilon^Q. \end{aligned}$$

结合 (4.2), 推出

$$m(\tilde{E}_\lambda) \leq m(\tilde{E}_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda}^1) + \frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} \leq \frac{(\varepsilon+1)^Q}{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda} + \frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} + \Omega_Q R_\varepsilon^Q.$$

令 $\lambda \rightarrow 0+$ 以及 ε 的任意性, 可得

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda m(\tilde{E}_\lambda) \leq 1. \quad (4.4)$$

另一方面, 注意到

$$m(\tilde{E}_{(1+\sqrt{\varepsilon})\lambda}^1) \geq m(\{x \in \mathbb{H}^n : |x|_h > R_\varepsilon, |M_{\mathbb{H}} f_1(x)| > (1 + \sqrt{\varepsilon})\lambda\}).$$

由 (4.3) 和 $|x|_h + r_\varepsilon \leq (2\varepsilon + 1)|x|_h/(\varepsilon + 1)$, 可得

$$\begin{aligned} m(\tilde{E}_{(1+\sqrt{\varepsilon})\lambda}^1) &\geq m\left(\left\{x \in \mathbb{H}^n : |x|_h > R_\varepsilon, \frac{1-\varepsilon}{m(\mathbb{B}(x, |x|_h + r_\varepsilon))} > (1 + \sqrt{\varepsilon})\lambda\right\}\right) \\ &\geq m\left(\left\{x \in \mathbb{H}^n : |x|_h > R_\varepsilon, \frac{1-\varepsilon}{m(\mathbb{B}(x, (2\varepsilon+1)|x|_h/(\varepsilon+1)))} > (1 + \sqrt{\varepsilon})\lambda\right\}\right) \\ &= m\left(\left\{x \in \mathbb{H}^n : |x|_h > R_\varepsilon, \frac{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^Q}{\Omega_Q (2\varepsilon+1)^Q |x|_h^Q} > (1 + \sqrt{\varepsilon})\lambda\right\}\right) \\ &\geq m\left(\left\{x \in \mathbb{H}^n : \frac{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^Q}{\Omega_Q (2\varepsilon+1)^Q |x|_h^Q} > (1 + \sqrt{\varepsilon})\lambda\right\}\right) - \Omega_Q R_\varepsilon^Q \\ &= \frac{(1-\sqrt{\varepsilon})(1+\varepsilon)^Q}{\lambda(2\varepsilon+1)^Q} - \Omega_Q R_\varepsilon^Q. \end{aligned}$$

因此, 利用 (4.2), 可得

$$m(\tilde{E}_\lambda) \geq m(\tilde{E}_{(1+\sqrt{\varepsilon})\lambda}^1) - \frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} \geq \frac{(1-\sqrt{\varepsilon})(1+\varepsilon)^Q}{\lambda(2\varepsilon+1)^Q} - \Omega_Q R_\varepsilon^Q - \frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}.$$

令 $\lambda \rightarrow 0+$ 以及 ε 的任意性, 可得 $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda m(\tilde{E}_\lambda) \geq 1$. 再结合 (4.4), 推出 $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda m(\tilde{E}_\lambda) = 1$. 定理 1.4(i) 的证明完毕.

现在证明 (ii). 对于 $\lambda > 0$, 设

$$D_\lambda := \left\{ x \in \mathbb{H}^n : \left| M_{\mathbb{H}} f(x) - \frac{1}{\Omega_Q |x|_h^Q} \right| > \lambda \right\},$$

$$D_\lambda^1 := \left\{ x \in \mathbb{H}^n : |x|_h > R_\varepsilon, \left| M_{\mathbb{H}} f_1(x) - \frac{1}{\Omega_Q |x|_h^Q} \right| > \lambda \right\}.$$

由极大算子 $M_{\mathbb{H}}$ 的次线性, 可得

$$\left| M_{\mathbb{H}} f(x) - \frac{1}{\Omega_Q |x|_h^Q} \right| \leq M_{\mathbb{H}} f_2(x) + \left| M_{\mathbb{H}} f_1(x) - \frac{1}{\Omega_Q |x|_h^Q} \right|.$$

因此,

$$\begin{aligned} m(D_\lambda) &\leq m(D_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda}^1) + m(\{x \in \mathbb{H}^n : M_{\mathbb{H}} f_2(x) > \sqrt{\varepsilon}\lambda\}) + m(\mathbb{H}^n \setminus D_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda}^1) \\ &\leq m(D_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda}^1) + \frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} + \Omega_Q R_\varepsilon^Q. \end{aligned} \quad (4.5)$$

下面只需估计 $m(D_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda}^1)$. 对于 $|x|_h > R_\varepsilon$, 由 (4.3)、 $|x|_h - r_\varepsilon > |x|_h/(1+\varepsilon)$ 和 $|x|_h + r_\varepsilon \leq (2\varepsilon + 1)|x|_h/(\varepsilon + 1)$ 可知,

$$\begin{aligned} \left| M_{\mathbb{H}} f_1(x) - \frac{1}{\Omega_Q |x|_h^Q} \right| &\leq \left| \frac{1-\varepsilon}{\Omega_Q (|x|_h + r_\varepsilon)^Q} - \frac{1}{\Omega_Q (|x|_h - r_\varepsilon)^Q} \right| + \left| \frac{1}{\Omega_Q (|x|_h - r_\varepsilon)^Q} - \frac{1}{\Omega_Q |x|_h^Q} \right| \\ &\leq \frac{(2\varepsilon + 1)^Q - 1 + \varepsilon}{\Omega_Q |x|_h^Q} + \frac{(\varepsilon + 1)^Q - 1}{\Omega_Q |x|_h^Q}. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} m(D_{(1-\sqrt{\varepsilon})\lambda}^1) &\leq m\left(\left\{x \in \mathbb{H}^n : \frac{(2\varepsilon + 1)^Q + (\varepsilon + 1)^Q - 2 + \varepsilon}{\Omega_Q |x|_h^Q} > (1 - \sqrt{\varepsilon})\lambda\right\}\right) \\ &= \frac{(2\varepsilon + 1)^Q + (\varepsilon + 1)^Q - 2 + \varepsilon}{(1 - \sqrt{\varepsilon})\lambda}. \end{aligned}$$

结合 (4.5), 可得

$$m(D_\lambda) \leq \frac{(2\varepsilon + 1)^Q + (\varepsilon + 1)^Q - 2 + \varepsilon}{(1 - \sqrt{\varepsilon})\lambda} + \frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} + \Omega_Q R_\varepsilon^Q.$$

令 $\lambda \rightarrow 0+$ 和 $\varepsilon \rightarrow 0$, 可得 $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda m(D_\lambda) = 0$. 这就完成了定理 1.4 的证明. $\square$

注 4.1 类似于定理 1.1, 容易验证定理 1.4 中的结论 (ii) 可导出结论 (i).

致谢 作者对审稿人提出的修改建议表示衷心感谢.

参考文献

- 1 Fabes E B, Rivire N M. Singular integrals with mixed homogeneity. *Studia Math*, 1966, 27: 19–38
- 2 Chen Y P, Ding Y. A characterization of commutators for parabolic singular integrals. *Math Scand*, 2011, 108: 5–25
- 3 Tao T. The weak-type $(1, 1)$ of $L \log L$ homogeneous convolution operators. *Indiana Univ Math J*, 1999, 48: 1547–1584

- 4 Janakiraman P. Limiting weak-type behavior for singular integral and maximal operators. Trans Amer Math Soc, 2006, 358: 1937–1952
- 5 Ding Y, Lai X D. L^1 -Dini conditions and limiting behavior of weak type estimates for singular integrals. Rev Mat Iberoam, 2017, 33: 1267–1284
- 6 Ding Y, Lai X D. Weak type $(1, 1)$ behavior for the maximal operator with L^1 -Dini kernel. Potential Anal, 2017, 47: 169–187
- 7 Guo W C, He J X, Wu H X. Limiting weak-type behaviors for some integral operators in harmonic analysis. ArXiv:1710.10602, 2017
- 8 Ding Y, Wu X F. Littlewood-Paley g -functions with rough kernels on homogeneous groups. Studia Math, 2009, 195: 51–86
- 9 Hu J X, Huang X P. A note on the limiting weak-type behavior for maximal operators. Proc Amer Math Soc, 2008, 136: 1599–1607
- 10 Coulhon T, Müller D, Zienkiewicz J. About Riesz transforms on the Heisenberg groups. Math Ann, 1996, 305: 369–379
- 11 Folland G B, Stein E M. Hardy Spaces on Homogeneous Groups. Mathematical Notes, Vol. 28. Princeton: Princeton University Press, 1982
- 12 Li H Q. Fonctions maximales centrées de Hardy-Littlewood sur les groupes de Heisenberg. Studia Math, 2009, 191: 89–100

Limiting weak-type behaviors for parabolic singular integrals and related operators

Xianming Hou & Huoxiong Wu

Abstract Suppose that $0 \leq \beta < \alpha$, $q = \alpha/(\alpha - \beta)$, $f \geq 0$. This paper establishes the following limiting weak-type behaviors of parabolic singular integral and fractional integral operators with homogeneous kernels Ω :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^q m(\{x \in \mathbb{R}^n : T_{\Omega, \beta}^\alpha f(x) > \lambda\}) = \frac{1}{\alpha} \|\Omega\|_q^q \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^q,$$

and

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^q m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|T_{\Omega, \beta}^\alpha f(x) - \frac{\Omega(x)}{\rho(x)^{\alpha-\beta}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right| > \lambda\right\}\right) = 0,$$

if Ω satisfies the L_β^q -Dini condition with $\int_{S^{n-1}} \Omega(x') J(x') d\sigma(x') = 0$ when $\beta = 0$. Meanwhile, the corresponding results for parabolic maximal singular integral operators and parabolic Marcinkiewicz integral with homogeneous kernels are given. In addition, we also establish the corresponding results for Hardy-Littlewood maximal function on Heisenberg group $\mathbb{H}^n$.

Keywords limiting behaviors, weak-type estimates, parabolic singular integrals, parabolic Marcinkiewicz integrals, maximal operators, Heisenberg group

MSC(2010) 42B20, 42B25

doi: 10.1360/N012018-00113