调和分析与小波研究中的逼近论方法

献给王斯雷教授 85 华诞

施咸亮*, 陈洋

湖南师范大学数学与统计学院, 高性能计算与随机信息处理省部共建教育部重点实验室, 长沙 410081

E-mail: xianliangshi@yahoo.com, ychenmath@hunnu.edu.cn

收稿日期: 2017-06-29; 接受日期: 2018-05-08; 网络出版日期: 2018-10-10; * 通信作者

湖南省自然科学基金 (批准号: 2018JJ3329) 和湖南师范大学博士科研启动金 (批准号: 5311203258) 资助项目

摘要 本文介绍了函数逼近论对调和分析与小波研究的应用. 本文从 Korovkin 定理开始, 介绍了试验函数法对小波研究的应用、Jackson 算子逼近对奇异积分算子有界性研究的应用、正则线性求和与逼近对边界探测研究以及 Fourier 逆变换计算的应用、以及稀疏数据反构函数的新结果.

关键词 函数逼近论 调和分析 小波

MSC (2010) 主题分类 41A35, 42C40

1 函数逼近论

函数逼近论是研究如何用简单的函数近似地逼近一般函数的数学分支. 它起源于 Weierstrass 于 1985 年发表的下述两个定理:

定理 A 在区间 $[a, b]$ 上的任何连续函数都可用代数多项式任意精确地一致逼近.

定理 B 周期 2π 的连续函数都可以用周期 2π 的三角函数任意精确地一致逼近.

后来, 经过 Bernstein、Chebyshev、Jackson、Kolmogolov 和 Nikolisky 等数学家的工作发展成一套完整的理论, 它们包括逼近论正定理、逆定理、线性算子逼近、插值逼近、函数类的整体逼近以及宽度理论等许多分支. 著名数学家陈建功院士是我国逼近论研究的创导者. 他从苏联引进了函数逼近论, 并且领导复旦大学和杭州大学的师生开展逼近论的研究. 王斯雷教授在三角级数或非正交三角级数的逼近与收敛方面有过杰出贡献 (参见文献 [1–4]). 在 20 世纪 60 年代和随后的一段时间内, 陈建功、王斯雷和谢庭藩教授所在的杭州大学是我国三角级数和逼近论研究的主要基地之一. 20 世纪 80 年代以后, 我们转向现代调和分析与小波的研究. 但是新的研究离不开老的基础. 本文的目的是介绍在调和分析与小波研究中的逼近论方法.

英文引用格式: Shi X L, Chen Y. Methods of approximation theory in research of harmonic analysis and wavelets (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1443–1456, doi: 10.1360/N012017-00143

2 正算子逼近

2.1 Korovkin 定理

正算子逼近论中有一条基本的定理:

定理 C^[5] 设 T_n 是连续函数空间 $C[a, b]$ 到自身的线性正算子序列. 假如对于 $f_i(x) = x^i$ ($i = 0, 1, 2$), 序列 $T_n(f_i)(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f_i(x)$ ($i = 0, 1, 2$), 那么, 对于一切 $f \in C[a, b]$, 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f) - f\|_{C[a, b]} = 0.$$

Korovkin 定理在正算子逼近论中有一定的应用价值. 例如, 要证明对于 $C[0, 1]$ 中的连续函数 $f(x)$, 它的 Bernstein 多项式

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 只要证明对于 $f_i(x)$ ($i = 0, 1, 2$), 序列 $B_n(f_i, x)$ 一致收敛于 $f_i(x)$ 就可以了. 对于这三个函数 $B_n(f_i, x)$ 容易算出来, 且显然有 $B_n(f_i, x)$ 一致收敛于 $f_i(x)$.

像这样通过对于某些特殊函数的验证来推断某些结论成立的方法称为“试验函数法”. 本节介绍试验函数法在小波与调和分析研究中的应用.

2.2 小波的刻画

小波分析是 20 世纪 80 年代发展起来的数学中的新方向. 它在发展初期研究的一个重要内容是构造形如

$$\psi_{j,k}(x) := a^{j/2} \psi(a^j x - bk), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

的规范正交基, 其中 $a > 1, b > 0$. 函数 ψ 称为小波. 构造这样的基的最基本的方法是多尺度分析. 1988 年, Daubechies^[6] 应用多尺度分析方法对于 $a = 2$ 和 $b = 1$ 构造了有紧支集且光滑的小波. 但小波不一定都是由多尺度分析方法得到的, 因此, 小波的刻画引起了人们的重视. 1996 年, Hernandez 等^[7] 建立了下述的刻画定理:

定理 D 设 $a = 2, b = 1$, 那么函数族 (2.1) 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 中的规范正交基的充分必要条件是

- (i) $\|\psi\| = (\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx)^{1/2} = 1$;
- (ii) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j \omega)|^2 = 1, \text{ a.e.};$
- (iii) $\sum_{j=0}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(2^j \omega)} \hat{\psi}(2^j(\omega + (2s-1)2\pi)) = 0, \text{ a.e.,}$

其中 $s \in \mathbb{Z}$.

这里 $\hat{f}$ 表示 f 的 Fourier 变换. 当 $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 时,

$$\hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\omega} dx.$$

他们的方法很难推广到伸缩因子为一般实数的情形. 对于一般实数 a ($a > 1$), 我们引入 a 进数和 a 进和的概念. 称形如

$$\alpha = \frac{m}{a^j}$$

的实数为 a 进数, 其中 j 和 m 为整数. 对于任意的 a 进数 α , 记

$$I_a(\alpha) := \left\{ (j, m) : \alpha = \frac{m}{a^j} \right\}.$$

文献 [8] 给出了下述的定理:

定理 2.1 [8] 函数族 (2.1) 构成了 $L^2(\mathbb{R})$ 中的规范正交基的充分必要条件是

- (i) $\|\psi\| = 1$;
- (ii) 对于一切 a 进数 α , 成立

$$\frac{1}{b} \sum_{(j,m) \in I_\alpha} \overline{\hat{\psi}(a^j \omega)} \hat{\psi}\left(a^j \left(\omega + \frac{2m\pi}{b}\right)\right) = \delta_{\alpha,0}, \quad \text{a.e.}, \quad (2.2)$$

其中

$$\delta_{\alpha,0} = \begin{cases} 1, & \text{若 } \alpha = 0, \\ 0, & \text{若 } \alpha \neq 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

称 (2.2) 左边为 a 进和.

定理 2.1 的证明实质上分两步完成. 记 $\Gamma := \{g : \hat{g}(\omega) = \chi_{[a,b]}(\omega), -\infty < a < b < \infty\}$. 第一步首先建立下述的 Korovkin 型定理:

定理 2.2 [8] 函数族 (2.1) 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 中的规范正交基的充分必要条件是对于一切 $f, g \in \Gamma$, 成立

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \langle \psi_{j,k}, g \rangle.$$

第二步通过求极限导出定理 2.1 中的第二个条件.

2.3 Daubechies 的一个公开问题

Daubechies 在她的名著 [6] 中提出这样一个问题: 若因子 a 是无理数, 那么是否存在在时域和频域中都有好的局部性的小波? 利用定理 2.1, 我们可以证明: 倘若 a 的任何整数次方 a^j 都是无理数, 那么不存在在时域和频域都有好的局部性的小波, 部分地解决了 Daubechies 的问题. 事实上, 对于这样的 a , 对应的 ψ 满足 $\|\psi\| = 1$,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a^j \omega)|^2 = b, \quad \text{a.e.}$$

和对一切 $m \in \mathbb{Z}$, 有

$$\overline{\hat{\psi}(a^j \omega)} \hat{\psi}\left(a^j \omega + \frac{2m\pi}{b}\right) = 0, \quad \text{a.e.}$$

这样的 ψ 必须满足

$$|\hat{\psi}(\omega)| = \chi_E(\omega), \quad \text{a.e.},$$

其中 E 是一个正测度集且满足 $|E| = 2\pi$. 这样的 ψ 不可能在时域和频域都有好的局部性. 对此, 文献 [9] 没有给出证明, 这里做一个简要的说明.

假如 χ_E 不等价于一个紧支集函数, 那么不论 N 多么大, 在 $[-N, N]$ 外总存在正测度集 E' 使得在 E' 上 $|\hat{\psi}(\omega)| = 1$. 因此, ψ 在频域中没有好的局部性. 设 χ_E 是紧支集的, $\text{supp } \hat{\psi}(\omega) \subset [-T, T]$, 总可设 $T > \pi$. 下面证明 ψ 是不可积的. 假设不然, 即有

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \right| dx < \infty, \quad (2.4)$$

那么, (2.4) 左边等于

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2\pi}}^{\frac{T}{2\pi}} \left| \int_{-T}^T \hat{\psi}(\omega) e^{i\omega(x + \frac{k\pi}{T})} d\omega \right| dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2\pi}}^{\frac{T}{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-T}^T \hat{\psi}(\omega) e^{i\omega x} e^{i\omega \frac{k\pi}{T}} d\omega \right| dx.$$

由此推知,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(x)| < \infty \quad (2.5)$$

在 $[-\frac{T}{2\pi}, \frac{T}{2\pi}]$ 上几乎处处成立, 其中

$$c_k(x) = \int_{-T}^T \hat{\psi}(\omega) e^{i\omega x} e^{i\omega \frac{k\pi}{T}} d\omega.$$

取点 $x_0 \in [-\frac{T}{2\pi}, \frac{T}{2\pi}]$ 使 (2.5) 成立. 这样,

$$\sum c_k(x_0) e^{-i\omega \frac{k\pi}{T}}$$

是一个绝对收敛的 Fourier 级数. 于是, $\hat{\psi}(\omega) e^{i\omega x_0}$ 是 $[-T, T]$ 上的连续函数. 这是不可能的. 因为

$$|\hat{\psi}(\omega)| = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E, \end{cases}$$

而 $|E| = 2\pi < 2T$. 因此, ψ 在 $\mathbb{R}$ 上不是可积的. 这表明 ψ 不可能在时域和频域中都有好的局部性.

2.4 容许条件

设 H 是可分的 Hilbert 空间, $\{h_n\}$ 是 H 中的一个序列. 假如对于一切 $h \in H$, 成立

$$A\|h\|^2 \leq \sum |\langle h, h_n \rangle|^2 \leq B\|h\|^2,$$

则称 $\{h_n\}$ 是 H 中的框架, 其中 A 和 B 是固定的正数, 称为框架界. Daubechies 证明了, 若函数族 (2.1) 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 中以 A 和 B 为界的框架, 那么,

$$A \ln a \leq \frac{1}{b} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \leq B \ln a, \quad (2.6)$$

这个条件被称为 Daubechies 容许条件. Daubechies 的证明应用了泛函分析中算子迹的理论, 证明很长. 文献 [9] 应用试验函数法和逼近论的技巧证出了比 (2.6) 更强的结果:

$$A \leq \frac{1}{b} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a^j \omega)|^2 \leq B, \quad \text{a.e.} \quad (2.7)$$

可以证明 (2.7) 蕴含 (2.6), 但反过来不成立. 这一结果被许多小波专著和文章引用.

2.5 紧框架的充要条件

为了得到比 (2.7) 更进一步的必要条件, 文献 [10] 采用了新的试验函数

$$\hat{f}(\omega) = \alpha \chi_{[a_1, b_1]}(\omega) + \beta \chi_{[a_2, b_2]}(\omega),$$

其中 $b_2 - a_2 = b_1 - a_1$. 设 α 是一个 a 进数. 记

$$\Delta_\alpha(\psi, \omega) := \frac{1}{b} \sum_{(j,s) \in I_a(\alpha)} \hat{\psi}(a^j \omega) \overline{\hat{\psi}(a^j \omega + sT)},$$

其中 $T = \frac{2\pi}{b}$.

又记

$$\Theta_\alpha(\psi, \omega) := \frac{1}{2} [\Delta_0(\psi, \omega) + \Delta_0(\psi, \omega + \alpha T)] - A$$

和

$$\Phi_\alpha(\psi, \omega) := B - \frac{1}{2} [\Delta_0(\psi, \omega) + \Delta_0(\psi, \omega + \alpha T)].$$

文献 [10] 证明了下述的定理:

定理 2.3 ^[10] 设函数族 (2.1) 构成以 A 和 B 为界的框架, 那么, 对于任意的 a 进数 α , 成立

$$\min\{\Theta_\alpha(\psi, \omega), \Phi_\alpha(\psi, \omega)\} \geq (1 - \delta_{\alpha,0}) |\Delta_\alpha(\psi, \omega)|, \quad \text{a.e.}, \quad (2.8)$$

其中 $\delta_{\alpha,0}$ 如 (2.3) 定义.

当框架定义中的 A 和 B 相等时, 框架 $\{h_n\}$ 称为紧框架. 由文献 [8] 中的证明可以见到, 仿射族 (2.1) 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 中以 A 为界的紧框架的充分必要条件是

$$\Delta_0(\psi, \omega) = A, \quad \text{a.e.} \quad (2.9)$$

和对于一切不等于零的 a 进数 α , 成立

$$\Delta_\alpha(\psi, \omega) = 0, \quad \text{a.e.} \quad (2.10)$$

不难证明当 $A = B$ 时条件 (2.8) 与 (2.9) 和 (2.10) 是等价的. 因此, 我们导出, 当 $A = B$ 时条件 (2.8) 也是充分的.

2.6 高维的 Korovkin 型定理

我们在建立定理 2.1 时并没有联系到 Korovkin 型定理. 后来, 我们建立了高维的 Korovkin 型定理后才把定理 2.1 的证明与试验函数法联系起来.

设 M 是 $n \times n$ 膨胀矩阵, 即其特征值 λ 满足 $|\lambda| > 1$. 对于给定的函数集合 $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_L\} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, 定义

$$\psi_{j,k,l}(x) := |\det M|^{j/2} \psi_l(M^j x - Dk), \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad (j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n,$$

其中 D 是 $n \times n$ 非奇异矩阵. 定义

$$J(f)(x) := \sum_{l=1}^L \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle f, \psi_{l,j,k} \rangle \psi_{l,j,k}(x), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n). \quad (2.11)$$

假如存在正数 $A \leq B$ 使得对于一切 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 成立

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{l=1}^L \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\langle f, \psi_{l,j,k} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad (2.12)$$

那么仿射族 $\Phi := \{\psi_{l,j,k}(x), l = 1, 2, \dots, L, (j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n\}$ 构成以 A 和 B 为界的框架. 假如 $A = B$, 则称 Φ 为紧框架. 在这种情形下, 成立着

$$\langle J(f), f \rangle = B\|f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad (2.13)$$

和

$$f(x) = \frac{1}{B}J(f)(x), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

文献 [11] 用逼近的方法证明了下述的定理:

定理 2.4 ^[11] 对于一切 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 成立 (2.13) 的充分必要条件是对于一切由

$$\hat{g}(\omega) = \chi_{[a_1, a_1+b] \times \dots \times [a_n, a_n+b]}(\omega)$$

确定的函数 g 成立 (2.13).

3 奇异积分算子的有界性

3.1 Torchinsky 的问题

设 $K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$, 其中 $\Omega(x)$ 是零阶齐次函数, 即满足 $\Omega(x) = \Omega(\lambda x)$, $\lambda > 0$. 考虑奇异积分算子

$$Tf(x) := \text{p.v.} K * f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|y| \geq \epsilon} K(x-y)f(y)dy,$$

其中 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. 这种算子是 Calderon 和 Zygmund 首先研究的. 他们证明, 若 $1 < p < \infty$, $\Omega \in \text{Lip}_\alpha(\Sigma_{n-1})$, $0 < \alpha \leq 1$, 那么 T 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到自身的有界算子. 后来 C-Z (Calderon-Zygmund) 定理的充分条件被 Hörmander 改进为下述的条件:

$$\int_{|x| > 2|y|} |K(x+y) - K(x)|dx \leq B, \quad |y| \neq 0.$$

1979 年, Fefferman ^[12] 讨论了如下形式的算子:

$$Tf(x) := \text{p.v.} H * f(x), \quad (3.1)$$

其中 $H(x) = K(x)b(x)$, $b(x)$ 是径向有界函数, 即 $b(x) = b_0(|x|)$, 其中 $b_0 \in L[0, \infty)$. 这类函数称为具有粗糙核的奇异积分算子. Fefferman 证明了, 若 $\Omega \in \text{Lip}_\alpha(\Sigma_{n-1})$, $0 < \alpha \leq 1$, 且 $n \geq 2$, 那么算子 T 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到自身的有界算子. Torchinsky 的问题是 “Fefferman 的条件 $\Omega \in \text{Lip}_\alpha(\Sigma_{n-1})$ 可否减弱为 Hörmander 条件”. 我们应用 Jackson 算子逼近 Ω 的方法解决了这个问题, 证明了如下的定理:

定理 3.1 ^[13] 设 $n \geq 2$, K 满足 Hörmander 条件, 那么由 (3.1) 定义的算子 T 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到自身的有界算子.

定理 3.1 证明的重要技巧是应用 Jackson 逼近定理. 设 $n = 2$, 我们需要下述引理:

引理 3.2 设 $g(x) \in L_{2\pi}$, g 的 L^1 连续模 $\omega_1(g, t)$ 满足 Dini- 条件

$$\int_0^1 \omega_1(g, t)t^{-1}dt < \infty,$$

那么,

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r} \int_{-\pi}^\pi g(\theta) e^{ir \sin(\theta - \theta_0)} d\theta = O(1),$$

其中 $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$.

我们把上式中的积分分解为

$$J = \int_1^\infty \frac{dr}{r} \int_{-\pi}^\pi g(\theta) e^{ir \sin(\theta - \theta_0)} d\theta = \sum_{k=1}^\infty \int_{k^3}^{(k+1)^3} \frac{dr}{r} \int_{-\pi}^\pi g(\theta) e^{ir \sin(\theta - \theta_0)} d\theta,$$

在每个区间 $[k^3, (k+1)^3]$ 上用关于周期 2π 函数的 k 阶 Jackson 算子逼近 $g(\theta)$. 利用逼近论工具成功地证明了引理 3.2. 当 $n > 2$ 时应用球面的 Jackson 算子, 可建立相应的结果.

4 函数跳跃值的计算

4.1 周期函数情形

边界探测是工程应用的重要课题, 它主要包含两方面的数学问题, 一是确定函数的间断点, 另一个是计算间断点处函数的跳跃值. 对于周期函数, 早在 1920 年 Lukács 就研究过这个问题. 设 $f \in L_{2\pi}$, 它的 Fourier 共轭级数为

$$\widetilde{S}[f](x) = \sum_{k=1}^\infty a_k \sin kx - b_k \cos kx. \quad (4.1)$$

Lukács 证明了, 假如以 $\widetilde{S}_n(f, x)$ 表示级数 (4.1) 的前 n 项部分和, 那么在 f 的第一类间断点 ξ , 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\pi \widetilde{S}_n(f, \xi)}{\ln n} = d_\xi(f), \quad (4.2)$$

其中 $d_\xi(f) = f(\xi + 0) - f(\xi - 0)$ 表示 f 在 ξ 处的跳跃值. Lukács 的方法没有实用价值. 即使 f 是一个分段光滑函数, 但极限过程 (4.2) 的收敛速度只能达到 $O(1/\ln n)$, 这样的速度太慢了. 1999 年, Gelb 和 Tadmor^[14] 提出了集中因子法, 代替序列 $\widetilde{S}_n(f, x)$, 他们构造了序列

$$\widetilde{S}_n^\sigma(f, x) = \sum_{k=1}^\infty \sigma\left(\frac{k}{n}\right) (a_k \sin kx - b_k \cos kx). \quad (4.3)$$

他们证明, 只要 σ 满足一定条件且函数 f 在 ξ 点满足

$$\int_0^1 \frac{|f(\xi + t) - f(\xi - t) - d_\xi(f)|}{t} dt < \infty, \quad (4.4)$$

那么在 f 的第一类间断点 ξ 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{S}_n^\sigma(f, \xi) = d_\xi(f). \quad (4.5)$$

使 (4.5) 成立的因子 $\{\sigma(\frac{k}{n})\}$ 称为集中因子. Gelb 和 Tadmor 应用他们的定理构造出集中因子 $\{\sigma(\frac{k}{n})\}$ 使得对于分段光滑函数, 序列 $\widetilde{S}_n^\sigma(f, x)$ 的逼近度达到 $O(\frac{\ln n}{n})$. 2004 年, Sjölin^[15] 改进了 Gelb 和 Tadmor 的结果, 证明了下述的定理:

定理 E 设 f 是分段光滑函数, 而 ξ 是 f 的简单间断点. 设 $\sigma \in C^2[0, 1]$,

(i) 若

$$\widetilde{S}_n^\sigma(f, \xi) \rightarrow d_\xi(f), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.6)$$

则 $\sigma(0) = 0$ 且

$$\int_0^1 \frac{\sigma(x)}{x} dx = -\pi; \quad (4.7)$$

(ii) 反之, 若 $\sigma(0) = 0$ 且 (4.7) 成立, 则

$$\widetilde{S}_n^\sigma(f, \xi) - d_\xi(f) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

2006 年, Shi 和 Shi^[16] 应用逼近论方法与 Sjölin 独立地建立了下述较为深刻的结果:

定理 4.1^[16] 设 $\xi \in T = [-\pi, \pi)$ 且 $\sigma \in \text{Lip}_1[0, 1]$, 那么对于一切 $f \in D_\xi$, (4.6) 成立的充分必要条件是 (4.7) 成立. 这里 D_ξ 是满足下述两个条件的 $f \in L(T)$ 全体:

(i) $d_\xi(f)$ 存在且有限;

(ii)

$$\frac{\psi_\xi(t) - d_\xi(f)}{t} \in L[0, \pi],$$

其中 $\psi_\xi(t) = f(\xi + t) - f(\xi - t)$.

比较定理 4.1 和 Lukács 的结果, 我们提出这样的问题:

问题 4.2 是否存在集中因子, 对于收敛性无要求 $f \in D_\xi(f)$, 但对于分段光滑函数逼近度可以达到 $O(\frac{\ln n}{n})$?

针对这一问题, 我们在文献 [17] 中做了深入讨论. 记

$$\Delta\mu_{n,k} = \mu_{n,k+1} - \mu_{n,k}, \quad \Delta^2\mu_{n,k} = \Delta\mu_{n,k+1} - \Delta\mu_{n,k}.$$

我们证明了下述的定理:

定理 4.3^[17] 假如对于一切 $f \in L(T)$ 在简单间断点 ξ 处成立 (4.6), 那么矩阵 $\mathcal{M}$ 满足

(i) 对于任意固定的 k , 成立 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n,k} = 0$;

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_{n,k}}{k} = -\pi$;

(iii) $B = \sup_{1 \leq k \leq n, n=1,2,\dots} |\mu_{n,k}| < \infty$.

反之, 假如条件 (i)–(iii) 满足且

(iv) 对于任意固定的 k , 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n) \Delta^2 \mu_{n,k} = 0;$$

(v) $\sum_{k=1}^n |\Delta^2 \mu_{n,k}| k (1 + \ln \frac{n}{k}) = O(1)$,

那么对于任意的 $f \in L(T)$, (4.6) 成立.

应用定理 4.3, 我们可以找到集中因子 $\mathcal{M} = \{\mu_{n,k}\}$, 使得对于一切 $f \in L(T)$, 在它的简单间断点 ξ , (4.6) 成立, 而对于分段光滑逼近度达到 $O(\frac{\ln n}{n})$.

4.2 非周期函数情形

关于非周期函数情形, 2009 年, 文献 [18] 研究了用 Coifman 和 Meyer 提出的局部余弦基来求跳跃值. 该文献提出了一个公开问题.

问题 4.4 可否应用仿射小波求函数的跳跃值?

文献 [19] 提出了用 Shannon 小波求跳跃值的方法, 文献 [20, 21] 建立了用共轭卷积算子和卷积导算子求跳跃值的方法. 最近, 我们研究了用样条小波求跳跃值的问题 [22].

记 $N_1(x) = \chi_{[0,1]}(x)$. 对于 $m = 2, 3, \dots$, 记

$$N_m(x) = N_{m-1} \star N_1(x) = \int_0^1 N_{m-1}(x-t)dt,$$

定义

$$B_m(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2 + k\pi} \right)^{2m}$$

和

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{N_m(\omega)}{\sqrt{B_m(\omega)}}. \quad (4.8)$$

定理 4.5 [22] 设 $f \in L^2(\mathbb{R})$, ξ 是 f 的简单间断点. 设 $P_n(f)(x)$ 是 f 在 V_n 中的正交投影, 其中 $\{V_n\}$ 是 ϕ 对应的多尺度分析序列, 那么,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\pi \widetilde{P_n(f)}(\xi)}{n \ln 2} = d_\xi(f),$$

其中 $\widetilde{P_n}$ 表示 P_n 的 Hilbert 变换.

2007 年, Sjölin [23] 提出了用 Fourier 积分求函数跳跃值的方法.

5 乘子变换的点态收敛性

算子的点态收敛性一直是调和与分析领域研究的核心内容之一, 而与平移算子可交换的乘子算子是调和与分析中重要的研究对象. 若函数 $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 则由

$$(\widehat{Tf}) = m\hat{f}$$

定义的乘子算子 T 是 L^2 有界的, 但其点态收敛性却不一定成立. 称 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集 V 是关于原点的星型区域, 如果原点是 V 的内点, 并由原点出发的射线与 V 的边界只有一个交点. 用 χ_E 表示集合 E 上的特征函数. 2006 年, Colzani 等 [24] 研究了由 $m(\cdot) = \chi_{tV}(\cdot)$ 所定义算子的点态收敛性, 并得到如下定理:

定理 F 设 V 是关于原点的星型区域. 若 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(y)|^2 (\log(2 + |y|^2))^2 dy < \infty,$$

则

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{tV} \hat{f}(y) e^{ix \cdot y} dy \rightarrow f(x)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时几乎处处成立, 其中

$$tV = \{x \in \mathbb{R}^n, x = ty, y \in V\}.$$

由 Fourier 级数部分和的研究可知, 正则求和法可改善其点态收敛性. 考虑更一般的乘子算子的点态收敛性. 设 $h(u)$ 是 $[0, \infty)$ 上局部可积的正值函数, 满足

$$H(t) = \int_0^t h(u) du \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty.$$

若 V 为关于原点的星型区域, 定义带参数的乘子

$$\begin{aligned} m(t, y) &= \frac{1}{H(t)} \int_0^t h(u) \chi_{uV}(y) du, \\ n(t, y) &= \frac{1}{H(t)} \int_0^t h(t-u) \chi_{uV}(y) du. \end{aligned}$$

其所对应的乘子变换分别为

$$\begin{aligned} \Phi_t(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} m(t, y) \hat{f}(y) e^{iy \cdot x} dy, \\ \Psi_t(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} n(t, y) \hat{f}(y) e^{iy \cdot x} dy. \end{aligned}$$

文献 [25] 证明了下述的定理:

定理 5.1 ^[25] 设 V 是关于原点的星形区域, 函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(y)|^2 (\log \log(4 + |y|^2))^2 dy < \infty, \quad (5.1)$$

且函数 $h(u)$ 是单调的, 满足

$$m \int_{r_{m-1}}^{r_m} h(u) du \leq CH(r_m), \quad (5.2)$$

其中 $r_m = m^{1/n}$, $m = 1, 2, \dots$

那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = f(x)$ 几乎处处成立.

定理 5.2 ^[25] 在定理 5.1 的条件下, $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi_t(x) = f(x)$ 几乎处处成立.

6 逼近论在压缩感知与相位恢复中的应用

近年来, 信号分析中的稀疏性和压缩感知受到许多学者的关注. 由于物理设备的离散化处理模式, 我们将信号抽象为一个 N 维向量, 对信号 x 的线性观测过程抽象为 $n \times N$ 矩阵 A 与向量 x 的乘积. 如果信号 $x \in \mathbb{C}^N$ 只有少量元素非零, 则认为它是稀疏的. 记集合 E 中元素的个数为 $\#E$. 信号 $x \in \mathbb{C}^N$ 称为 s -稀疏的 ($s \ll N$), 如果

$$\|x\|_0 := \#\{j : x[j] \neq 0\} = s.$$

用 Σ_s 表示 s -稀疏信号的集合. 压缩感知研究了稀疏信号 $x \in \mathbb{C}^N$ 如何由少量的线性观测 $y = Ax \in \mathbb{C}^m$ 恢复的问题, 其中 $m \ll N$, 矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times N}$. 具体说来, 包括两个问题:

(1) 如何选取合适的观测矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times N}$;

(2) 由 $y = Ax \in \mathbb{C}^m$ 恢复信号 $x \in \mathbb{C}^N$ 的有效算法 Δ 是什么?

事实上, 这两个问题是相互关联的. 我们有下面的定理:

定理 G ^[26] $\{z \in \mathbb{C}^N : Az = Ax, \|z\|_0 \leq s\} = \{x\}$ 当且仅当 x 是如下规划问题:

$$P_0 : \min_{z \in \mathbb{C}^N} \|z\|_0 \\ \text{s.t. } Az = y$$

的唯一解.

要使问题 P_0 有唯一解, 需对观测矩阵 A 加限制, 如 $\text{rank} A \geq 2s$. 但 P_0 是非凸的、NP (non-deterministic polynomial) 完全的问题. 而

$$\lim_{q \rightarrow 0^+} \|z\|_q^q = \|z\|_0$$

且 $\|z\|_q$ ($q \geq 1$) 是凸运算, 可利用问题

$$P_q : \min_{z \in \mathbb{C}^N} \|z\|_q \\ \text{s.t. } Az = y$$

来逼近问题 P_0 . 但 $q > 1$ 时, 问题 P_q 的解不是稀疏的. 因此, 考虑如下凸松弛问题:

$$P_1 : \min_{z \in \mathbb{C}^N} \|z\|_1 \\ \text{s.t. } Az = y,$$

并将该问题的解记为 $\Delta_1(Ax)$. 自然的问题是, P_0 的解与 P_1 的解是否一致? 或者对于什么样的矩阵 A , 能通过 P_1 问题的解恢复出原信号? 更进一步, 因为现实世界中的信号往往不是精确稀疏的, 而是近似稀疏的. 给定范数 $\|\cdot\|_X$, 那么信号 $x \in \mathbb{C}^N$ 在范数 $\|\cdot\|_X$ 意义下最佳 s -项逼近误差为

$$\sigma_s(x)_X := \inf_{z \in \Sigma_s} \|z - x\|.$$

为衡量 P_1 问题解的有效性, 首先对矩阵引入 RIP (restricted isometry property) 性质. 矩阵 A 满足 s -阶 RIP 性质, 是指存在常数 $\delta_s \in [0, 1)$ 使得对任意的 $x \in \Sigma_s$, 都有

$$(1 - \delta_s)\|x\|^2 \leq \|Ax\|^2 \leq (1 + \delta_s)\|x\|^2,$$

δ_s 称为 RIP 常数. 并有如下定理:

定理 H ^[27] 如果矩阵 A 满足 $2s$ -阶 RIP 性质, 且 RIP 常数 $\delta_s \leq \sqrt{2} - 1$, 那么存在常数 C , 使得对任意的 $x \in \mathbb{C}^N$, 都有

$$\|\Delta_1(Ax) - x\|_2 \leq C \frac{\sigma_s(x)_1}{\sqrt{s}}.$$

而后, Mo 和 Li ^[28] 将定理中 RIP 常数改进为 $\delta_{2s} \leq 0.4931$.

在许多应用中, 信号在某 (冗余) 字典或紧框架下的表示是稀疏的, 例如, 在小波基或小波框架下表示是稀疏的. 一些物理采样设备接收的信息为 Fourier 变换的信息, 称为 Fourier 观测. 2015 年, Chen 等 ^[29, 30] 利用 Prony 算法实现了由 Fourier 观测信息精确重构稀疏小波信号.

设有膨胀矩阵 $\mathbf{D}$, 具有紧支集的尺度向量 $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)^T$. 令 $M = |\det \mathbf{D}|$. 我们可以由多尺度分析构造向量值小波族 $\Psi_m = (\psi_{m,1}, \dots, \psi_{m,r})^T$, $1 \leq m \leq M-1$, 使得

$$\{M^{j/2}\Psi_m(\mathbf{D}^j \mathbf{x} - \mathbf{k}) : 1 \leq m \leq M-1, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d\}$$

构成小波空间 W_j 的 Riesz 基 (参见文献 [6, 31–33]).

取 $J \geq 0$, 对尺度空间 V_J 的函数 f , 有唯一的小波展开

$$f = f_0 + g_0 + \dots + g_{J-1}, \quad (6.1)$$

其中

$$f_0 = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{a}_0^T(\mathbf{k}) \Phi(\cdot - \mathbf{k}) \in V_0 \quad (6.2)$$

和

$$g_j = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{b}_{m,j}^T(\mathbf{k}) M^j \Psi_m(\mathbf{D}^j \cdot - \mathbf{k}) \in W_j, \quad 0 \leq j \leq J-1. \quad (6.3)$$

称小波信号 $f \in V_J$ 是稀疏的, 如果 f_0 和 g_j ($0 \leq j \leq J-1$) 具有稀疏的展开. 当 $0 \leq j \leq J-1$ 时, 定义第 j 层的稀疏度

$$s_j \geq \begin{cases} \max\{\#K_0, \#K_{1,0}, \dots, \#K_{M-1,0}\}, & j = 0, \\ \max\{\#K_{1,j}, \dots, \#K_{M-1,j}\}, & j = 1, \dots, J-1, \end{cases}$$

其中 K_0 和 $K_{m,j}$ 分别为小波展开式 (6.1)–(6.3) 中系数构成的向量 $(a_0(\mathbf{k}))_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ 和 $(b_{m,j}(\mathbf{k}))_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ 的支集. 小波信号 $f \in V_J$ 的稀疏度记为 $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_{J-1})$, 其中分量 s_j 即为第 j 层的稀疏度.

设 $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d$. 令 $\mathbf{M} = \mathbf{D}^T$, $\|\mathbf{s}\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq J-1} s_j$. 当 $0 \leq j \leq J-1$, $0 \leq m \leq M-1$ 时, 定义

$$\Gamma_j = \left\{ \left(-s_j + \frac{1}{2} \right) \mathbf{h}, \left(-s_j + \frac{3}{2} \right) \mathbf{h}, \dots, \left(s_j - \frac{1}{2} \right) \mathbf{h} \right\}$$

和

$$\Omega_j = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_j} \bigcup_{m=0}^{M-1} (\pi\gamma + 2\pi \mathbf{M}^j \mathbf{p}_m + 2\pi \mathbf{M}^{j+1} \Lambda(\pi \mathbf{M}^{-j-1} \gamma + 2\pi \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}_m)),$$

其中 $\mathbf{p}_m$ ($1 \leq m \leq M-1$) 是 $\mathbb{Z}^d / \mathbf{M}\mathbb{Z}^d$ 的代表元, $\Lambda(\boldsymbol{\xi}) = \{\mathbf{k}_l(\boldsymbol{\xi}), 1 \leq l \leq r\}$ 使得

$$(\widehat{\Phi}(\boldsymbol{\xi} + 2\pi \mathbf{k}_1(\boldsymbol{\xi})), \dots, \widehat{\Phi}(\boldsymbol{\xi} + 2\pi \mathbf{k}_r(\boldsymbol{\xi}))) \text{ 是非奇异的.}$$

令

$$\Omega = \bigcup_{j=0}^{J-1} \Omega_j. \quad (6.4)$$

那么多层一致采样的集合

$$\Omega \subset \left\{ \left(-\|\mathbf{s}\|_\infty + \frac{1}{2} \right) \mathbf{h}\pi, \dots, \left(\|\mathbf{s}\|_\infty - \frac{1}{2} \right) \mathbf{h}\pi \right\} + 2\pi \mathbb{Z}^d,$$

且

$$\#\Omega \leq \sum_{j=0}^{J-1} \#\Omega_j = 2Mr(s_0 + s_1 + \dots + s_{J-1}). \quad (6.5)$$

定理 6.1 ^[29, 30] 设 D 为膨胀矩阵且 $|\det D| = M \geq 2$, Φ 为紧支集的尺度向量, Ψ_m ($1 \leq n \leq M$) 为多尺度分析生成的小波向量. 令 Ω 是 (6.4) 定义的采样集合, 其中 $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_d)$. 如果 $1, h_1, \dots, h_d$ 在实数域内线性无关, 那么任意具有稀疏度 $\mathbf{s} = \{s_1, \dots, s_{J-1}\}$ 的小波信号 f 可由其在多层一致采样集合 Ω 上的 Fourier 观测精确重构.

由于计算机的发展, 许多近似理论的应用发生了很大的变化. 但是函数逼近论的思想、理论和方法仍然在分析学的研究中起着巨大作用, 它自身也还会在应用中得到进一步发展.

参考文献

- 1 王斯雷. 关于齐革蒙特的一个问题. 数学学报, 1979, 11: 194–194
- 2 王斯雷. 拉特马吼级数表示的函数. 数学学报, 1963, 13: 647–652
- 3 王斯雷. 关于哈尔级数. 数学学报, 1966, 16: 211–222
- 4 王斯雷. 富里埃级数可能具有有界发散的绝对可和点. 数学进展, 1965, 3: 103–107
- 5 Korovkin P P. Linear Operators and Approximation Theory. Delhi: Hindustan Publishing, 1960
- 6 Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992, 57–96
- 7 Hernandez E, Wang X H, Weiss G. Smoothing minimally supported frequency wavelets, Part I. J Fourier Anal Appl, 1996, 2: 329–340
- 8 Chui C K, Shi X L. Orthonormal wavelets and tight frames with arbitrary real dilations. Appl Comput Harmon Anal, 2000, 9: 243–264
- 9 Chui C K, Shi X L. Inequalities of Littlewood-Paley type for frames and wavelets. SIAM J Math Anal, 1993, 24: 263–277
- 10 Shi X L, Chen F. Necessary conditions for Gabor frames. Sci China Ser A, 2007, 50: 276–284
- 11 施咸亮, 陈洁. 紧框架中的 Korovkin 型定理. 中国科学: 数学, 2013, 43: 1131–1144
- 12 Fefferman R. A note on singular integrals. Proc Amer Math Soc, 1979, 74: 266–270
- 13 Shi X L. Some remarks on singular integrals. Indiana Univ Math J, 1986, 35: 103–116
- 14 Gelb A, Tadmor E. Detection of edges in spectral data. Appl Comput Harmon Anal, 1999, 7: 101–135
- 15 Sjölin P. Convergence of generalized partial sums of Fourier series integrals. Math Z, 2004, 55: 21–31
- 16 Shi Q L, Shi X L. Determination of jumps in terms of spectral data. Acta Math Hungar, 2006, 110: 193–206
- 17 Shi X, Zhang H Y. Determination of jumps via advanced concentration factors. Appl Comput Harmon Anal, 2009, 26: 1–13
- 18 Shi X L, Hu L. Determination of jumps for functions based on Malvar-Coifman-Meyer conjugate wavelets. Sci China Ser A, 2009, 52: 443–456
- 19 Shi X L, Wang W. Pointwise convergence of wavelets of generalized Shannon type. Acta Math Sin Engl Ser, 2013, 29: 2343–2354
- 20 Shi X L, Wang W. Applications of conjugate operators to determination of jumps for functions. Acta Math Hungar, 2012, 134: 434–451
- 21 Chen Y, Shi X L. Determination of jumps in terms of derivative convolution operators. Acta Math Hungar, 2013, 139: 372–392
- 22 Zhang H Y, Shi X L, Wang J Z. An affirmative result of the open question on determining function jumps by spline wavelets. Acta Math Sin Engl Ser, 2018, 34: 921–932
- 23 Sjölin P. Convergence of generalized conjugate partial Fourier integrals. Math Z, 2007, 256: 265–278
- 24 Colzani L, Meaney C, Prestini E. Almost everywhere convergence of inverse Fourier transforms. Proc Amer Math Soc, 2006, 134: 1651–1660
- 25 Shi X L, Chen Y, Hu L. An application of Chen's theorem to convergence of Fourier multiplier transforms. Appl Math J Chinese Univ Ser A, 2013, 28: 455–464
- 26 Foucart S, Rauhut H. A Mathematical Introduction to Compressive Sensing. Berlin: Springer, 2013, 41–57
- 27 Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. IEEE Trans Inform Theory, 2006, 52: 489–509
- 28 Mo Q, Li S. New bounds on the restricted isometry constant δ_{2k} . Appl Comput Harmon Anal, 2011, 31: 460–468

- 29 Chen Y, Cheng C, Sun Q. Reconstruction of sparse multiband wavelet signals from Fourier measurements. In: Proceedings of the 11th International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA). Washington: IEEE Computer Society, 2015, 78–81
- 30 Chen Y, Cheng C, Sun Q. Reconstruction of sparse wavelet signals from partial Fourier measurements. IEEE Signal Process Lett, 2015, 22: 2299–2303
- 31 Goodman T N T, Lee S L, Tang W S. Wavelets in wandering subspaces. Trans Amer Math Soc, 1993, 338: 639–654
- 32 Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing. London: Academic Press, 1999
- 33 Bi N, Dai X, Sun Q. Construction of compactly supported M -band wavelets. Appl Comput Harmon Anal, 1999, 6: 113–131

Methods of approximation theory in research of harmonic analysis and wavelets

Xianliang Shi & Yang Chen

Abstract In this paper, we give a brief introduction about applications of approximation theory of functions in harmonic analysis and wavelet research. We start from Korovkin's theorem to introduce applications of test functions in wavelet research. Then we present boundedness of singular integrals by using Jackson approximation. In addition, applications of regular linear summation and approximation in edge detection and inverse Fourier transform are stated. We also introduce some new results in signal reconstruction by sparse data.

Keywords approximation theory of functions, harmonic analysis, wavelet

MSC(2010) 41A35, 42C40

doi: 10.1360/N012017-00143