乘积函数的双 Hilbert 变换和 Bedrosian 等式

献给王斯雷教授 85 华诞

崔晓娜¹, 燕敦彦^{2*}

1. 河南师范大学数学与信息科学学院, 新乡 453007;

2. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049

E-mail: cuixiaona@htu.edu.cn, ydunyan@ucas.ac.cn

收稿日期: 2018-05-24; 接受日期: 2018-06-27; 网络出版日期: 2018-09-30; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11471309 和 11561062) 资助项目

摘要 本文研究双 Hilbert 变换的性质, 并对于 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^2)$, $p^{-1} + q^{-1} \leq 1$, 探讨在双 Hilbert 变换作用下 Bedrosian 等式 $H_2 H_1(fg) = f H_2 H_1 g$ 成立的充要条件, 其中 $H_2 H_1$ 是双 Hilbert 变换.

关键词 双 Hilbert 变换 Bedrosian 等式 乘积函数

MSC (2010) 主题分类 42B20, 42B35

1 引言

对 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ ($1 \leq p < \infty$) 和任意的 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, 有

$$H_2 H_1 f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^2} \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \int_{\substack{|y_1 - x_1| > \varepsilon_1 \\ |y_2 - x_2| > \varepsilon_2}} \frac{f(y_1, y_2)}{(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)} dy_1 dy_2, \quad (1.1)$$

称为双 Hilbert 变换. Hilbert 变换和高维 Hilbert 变换 (也称作 Hilbert 变换) 在物理学、工程学和数学等许多学科有广泛的应用 (参见文献 [1]). 特别地, 双 Hilbert 变换在相干光线衍射的功率谱估计中有应用 (参见文献 [2]).

本文主要研究由 (1.1) 定义的双 Hilbert 变换 $H_2 H_1 f$ 的性质, 其中 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, 进而考虑当 $g \in L^q(\mathbb{R}^2)$ 时, 刻画 Bedrosian 等式

$$H_2 H_1(fg)(x) = f(x) H_2 H_1 g(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (1.2)$$

成立的条件, 其中 $p, q \in (1, \infty)$ 满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1. \quad (1.3)$$

英文引用格式: Cui X N, Yan D Y. The double Hilbert transform and the double Bedrosian identity of the product functions (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1253–1266, doi: 10.1360/N012018-00140

众所周知, 对一个算子 T 而言, 等式 $T(fg) = fTg$ 成立, 当且仅当 $[T, f]g = 0$ 成立. 所以说, 想要刻画的 (1.2) 成立的条件等价于算子 $[H_2H_1, f]$ 作用在 g 上等于零的条件. 事实上, 算子 $[T, f]$ 是一个交换子, 其定义为 $[T, f]g = fTg - T(fg)$, 交换子在调和分析 and 偏微分方程中有广泛的应用.

对于 (1.2), 如果考虑一维情形, 且运用 Hilbert 变换 H 来代替 H_2H_1 , 则 $H(fg) = fHg$ 正好是 Bedrosian 等式. 这里仍称由双 Hilbert 变换生成的 (1.2) 为 Bedrosian 等式.

Bedrosian^[3] 建立了如下重要的结果. 令 f 和 g 是作用在 $L^2(\mathbb{R})$ 上的复值函数. 如果 f 的 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)$ 在 $|\omega| > a$ 中等于零, 而且 g 的 Fourier 变换 $\hat{g}(\omega)$ 在 $|\omega| < a$ 中为零, 其中 a 是一个正常数, 则 f 和 g 乘积的 Hilbert 变换可以表述为

$$H(f(x)g(x)) = f(x)Hg(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

如果对于一个实数 t 和一个非空集 $\Omega \subset \mathbb{R}$, 令 $t\Omega := \{tx : x \in \Omega\}$, 且令 $I := [0, 1]$ 和 $I^- := [-1, 0]$, 定义集合的乘法 $I \cdot \Omega$ 和 $I^- \cdot \Omega$ 分别为

$$I \cdot \Omega := \bigcup_{t \in I} t\Omega, \quad I^- \cdot \Omega := \bigcup_{t \in I^-} t\Omega.$$

关于 Bedrosian 等式 (1.4) 成立的条件, 在文献 [4] 中给出一个重要结果如下.

定理 A 如果 $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, 假设 $\hat{f}$ 和 $\hat{g}$ 满足条件

$$(I^- \cdot \text{supp}(\hat{f})) \cap \text{supp}(\hat{g}) = \emptyset,$$

则 fg 的 Hilbert 变换满足 Bedrosian 等式 (1.4).

关于 Bedrosian 等式 (1.4) 的一些其他结果, 可参见文献 [5–8].

本文第 2 节考虑双 Hilbert 变换的性质, 第 3 节给出 Bedrosian 等式 (1.2) 成立的一个充要条件, 并运用这个充要条件给出两个命题.

本文用到的记号如下. 记 f 的 Fourier 变换为 $\hat{f}$, 记号 $\check{f}$ 和 $(f)^\vee$ 都表示 f 的 Fourier 逆变换,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx,$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}^2$, 且 $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$, $x \in \mathbb{R}^2$. sgn 表示符号函数. 对于实数 $1 < p < \infty$, 记 p 的对偶指标 $p' = \frac{p}{p-1}$. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ 表示定义在 $\mathbb{R}^2$ 上具有紧致集的无穷可微函数的全体, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 Schwartz 函数集. 我们特别定义 Q_i 为平面 $\mathbb{R}^2$ 上的第 i 象限, 其中 $i = 1, 2, 3, 4$.

2 双 Hilbert 变换作用在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 上的性质

本节的目标是给出双 Hilbert 变换的一些性质. 首先给出 $\mathbb{R}^2$ 上的测试函数 (参见文献 [9, 10]). 令 $\mathbf{X}(\mathbb{R}^2)$ 表示 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 上张量积函数的有限线性组合, 即对任意的 $\varphi(x_1, x_2) \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^2)$, 存在一个有限的正整数 k , 使得

$$\varphi(x) = \sum_{|\mu|=1}^k \varphi_{\mu_1}(x_1) \varphi_{\mu_2}(x_2)$$

成立, 其中指标 $\mu = (\mu_1, \mu_2)$. 考虑由 Schwartz 测试函数空间 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ 所诱导的拓扑为 $\mathbf{X}(\mathbb{R}^2)$ 上的拓扑.

2.1 $1 < p < \infty$ 的情形

本小节考虑双 Hilbert 变换作用在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ ($1 < p < \infty$) 上的性质.

引理 2.1 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < \infty$, 对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^2$, 则 $H_2 H_1 f(x) = H_1 H_2 f(x)$ 成立.

证明 根据文献 [10] 可知, $\mathbf{X}(\mathbb{R}^2)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ ($1 < p < \infty$) 中是稠密的. 也即是说, $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < \infty$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\varphi \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^2)$, 使得

$$\|\varphi - f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon$$

成立. $\mathbf{X}(\mathbb{R}^2)$ 中函数的特征意味着

$$\begin{aligned} H_2 H_1 \varphi(x_1, x_2) &= H_2 H_1 \left(\sum_{\mu} \varphi_{\mu_1}(x_1) \varphi_{\mu_2}(x_2) \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sum_{\mu} \varphi_{\mu_1}(t_1) \varphi_{\mu_2}(t_2)}{(x_1 - t_1)(x_2 - t_2)} dt_1 dt_2 \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{\mu} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_{\mu_1}(t_1) \varphi_{\mu_2}(t_2)}{(x_1 - t_1)(x_2 - t_2)} dt_1 dt_2 \\ &= \sum_{\mu} H_1 \varphi_{\mu_1}(x_1) H_2 \varphi_{\mu_2}(x_2) \\ &= H_1 H_2 \left(\sum_{\mu} \varphi_{\mu_1}(x_1) \varphi_{\mu_2}(x_2) \right) \\ &= H_1 H_2 \varphi(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (2.1)$$

由双 Hilbert 变换在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 上有界^[10] (其中 $1 < p < \infty$) 和双 Hilbert 变换的线性性, 有

$$\|H_2 H_1 \varphi - H_2 H_1 f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \|\varphi - f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon \quad (2.2)$$

和

$$\|H_1 H_2 \varphi - H_1 H_2 f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \|\varphi - f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon. \quad (2.3)$$

结合 (2.1)–(2.3), 可得到

$$\|H_2 H_1 f - H_1 H_2 f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} < 2\varepsilon,$$

由 ε 的任意性, 这意味着对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^2$, $H_2 H_1 f(x_1, x_2) = H_1 H_2 f(x_1, x_2)$ 是成立的. 至此, 我们证得了该引理. $\square$

下面的一个推论是引理 2.1 的一个直接结果.

推论 2.1 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < \infty$, 则有下列等式成立:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) [H_1 H_2 g(x)] dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) [H_2 H_1 g(x)] dx.$$

事实上, 双 Hilbert 变换具有与 Hilbert 变换相似的一些性质.

命题 2.1 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < \infty$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^2} [H_2 H_1 f(x)] g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) [H_2 H_1 g(x)] dx \quad (2.4)$$

和

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^2} H_2 H_1 f(x) \overline{[H_2 H_1 g(x)]} dx. \quad (2.5)$$

证明 由文献 [11] 知, $f(x) \in L^p(\mathbb{R})$, $g(x) \in L^{p'}(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$,

$$\int_{\mathbb{R}} H f(x) g(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) H g(x) dx \quad (2.6)$$

成立, 其中 H 表示 Hilbert 变换. 现在运用这个结果得到我们想要的双 Hilbert 变换的性质.

下面固定 $x_1 \in \mathbb{R}$, 将双 Hilbert 变换 $H_2 H_1 f(x_1, x_2)$ 视为 $H_1 f(x_1, x_2)$ 关于 x_2 的 Hilbert 变换, 即 $H_2(H_1 f(x_1, x_2))$, 运用 (2.6), 有

$$\int_{\mathbb{R}} H_2(H_1 f(x_1, x_2)) g(x_1, x_2) dx_2 = - \int_{\mathbb{R}} H_1 f(x_1, x_2) H_2 g(x_1, x_2) dx_2,$$

进而得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} H_2(H_1 f(x_1, x_2)) g(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 &= - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} H_1 f(x_1, x_2) H_2 g(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} H_1 f(x_1, x_2) H_2 g(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) H_1 H_2 g(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中, 在第二个等式处, 我们用到了 Fubini 定理. 由 $H_1 f(\cdot, \cdot) \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $H_2 g(\cdot, \cdot) \in L^{p'}(\mathbb{R}^2)$, 在第三个等式中, 我们再次用到了等式 (2.6). 最后, 结合 (2.7) 和推论 2.1, 我们得到了 (2.4) 的证明.

接下来, 考虑 (2.5) 的证明. 首先由文献 [11] 知,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} H f(x) \overline{H g(x)} dx. \quad (2.8)$$

对几乎处处的 $x_2 \in \mathbb{R}$, 运用 (2.8), 我们有

$$\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) \overline{g(x_1, x_2)} dx_1 = \int_{\mathbb{R}} H_1 f(x_1, x_2) \overline{H_1 g(x_1, x_2)} dx_1.$$

运用在 (2.7) 中类似的方法, 得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) \overline{g(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} H_1 f(x_1, x_2) \overline{H_1 g(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} H_1 f(x_1, x_2) \overline{H_1 g(x_1, x_2)} dx_2 dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} H_2 H_1 f(x_1, x_2) \overline{H_2 H_1 g(x_1, x_2)} dx_2 dx_1, \end{aligned}$$

这样就得到了 (2.5) 的证明. □

下面给出双 Hilbert 变换作用在卷积函数上的一个性质.

命题 2.2 设两个函数 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$ 且 $1 < p < \infty$, 对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^2$, 等式

$$H_2 H_1(f * g)(x) = ((H_2 H_1 f) * g)(x)$$

成立.

证明 首先, 根据 Hölder 不等式和双 Hilbert 变换在函数空间 $L^p(\mathbb{R}^2)$ ($1 < p < \infty$) 上的有界性, 显然, $f * g$, $H_2 H_1 f * g$ 和 $H_2 H_1(f * g)$ 都属于 $L^p(\mathbb{R}^2)$. 对于任意的 $h(x) \in L^{p'}(\mathbb{R}^2)$, 根据命题 2.1, 有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} H_2 H_1(f * g)(x) h(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} f * g(x) H_2 H_1 h(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} H_2 H_1 h(x) \int_{\mathbb{R}^2} f(x-u) g(u) du dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

由 Hölder 不等式和 Young 不等式可得到

$$\int_{\mathbb{R}^2} |H_2 H_1 h(x)| \int_{\mathbb{R}^2} |f(x-u) g(u)| du dx \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \|h\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^2)}.$$

所以, (2.9) 的右侧积分是绝对可积的. 对 (2.9) 运用 Fubini 定理, 可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} H_2 H_1[f * g](x) h(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} g(u) \int_{\mathbb{R}^2} h(x) H_2 H_1 f(x-u) dx du \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} H_2 H_1 f(x-u) g(u) h(x) du dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (H_2 H_1 f) * g(x) h(x) dx. \end{aligned}$$

从而, 对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^2$, $H_2 H_1[f * g](x) = (H_2 H_1 f) * g(x)$ 成立. $\square$

接下来考虑双 Hilbert 变换作用在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 上的 Fourier 变换的性质.

命题 2.3 令 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, 其中 $1 < p \leq 2$. 对几乎处处的 $\xi \in \mathbb{R}^2$, 双 Hilbert 变换 $H_2 H_1 f(x)$ 的 Fourier 变换可表示为

$$\widehat{H_2 H_1 f}(\xi) = -\operatorname{sgn}(\xi_1 \xi_2) \widehat{f}(\xi). \quad (2.10)$$

证明 由文献 [11] 知, 对任意的 $f \in L^p(\mathbb{R})$ ($1 < p \leq 2$), 对几乎处处的 $\xi \in \mathbb{R}$, 有

$$\widehat{Hf}(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi).$$

由文献 [10] 和函数 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ ($1 < p \leq 2$) 可知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在

$$\varphi(x) = \sum_{\mu} \varphi_{\mu_1}(x_1) \varphi_{\mu_2}(x_2) \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^2),$$

其中 $|\mu|$ 是一个有限非负积分, 使得

$$\|\varphi - f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon$$

成立. 通过直接计算, 我们得到

$$H_2 H_1 \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sum_{\mu} \varphi_{\mu_1}(t_1) \varphi_{\mu_2}(t_2)}{(x_1 - t_1)(x_2 - t_2)} dt_1 dt_2$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\mu} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_{\mu_1}(t_1)\varphi_{\mu_2}(t_2)}{(x_1 - t_1)(x_2 - t_2)} dt_1 dt_2 \\
 &= \sum_{\mu} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_{\mu_2}(t_2)}{x_2 - t_2} dt_2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_{\mu_1}(t_1)}{x_1 - t_1} dt_1 \\
 &= \sum_{\mu} H_2 \varphi_{\mu_2}(x_2) H_1 \varphi_{\mu_1}(x_1).
 \end{aligned}$$

从而, φ 的双 Hilbert 变换的 Fourier 变换可以表示为

$$\begin{aligned}
 \widehat{H_2 H_1 \varphi}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{\mu} H_2 \varphi_{\mu_2}(x_2) H_1 \varphi_{\mu_1}(x_1) e^{-ix_1 \xi_1} e^{-ix_2 \xi_2} dx_1 dx_2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu} \int_{\mathbb{R}^2} H_2 \varphi_{\mu_2}(x_2) H_1 \varphi_{\mu_1}(x_1) e^{-ix_1 \xi_1} e^{-ix_2 \xi_2} dx_1 dx_2 \\
 &= \sum_{\mu} \widehat{H_2 \varphi_{\mu_2}}(\xi_2) \widehat{H_1 \varphi_{\mu_1}}(\xi_1) \\
 &= \sum_{\mu} (-i \operatorname{sgn}(\xi_2)) \widehat{\varphi_{\mu_2}}(\xi_2) (-i \operatorname{sgn}(\xi_1)) \widehat{\varphi_{\mu_1}}(\xi_1) \\
 &= -\operatorname{sgn}(\xi_1 \xi_2) \sum_{\mu} \widehat{\varphi_{\mu_2}}(\xi_2) \widehat{\varphi_{\mu_1}}(\xi_1) \\
 &= -\operatorname{sgn}(\xi_1 \xi_2) \widehat{\varphi}(\xi).
 \end{aligned}$$

进而我们得到, 对任意的 $\mathbf{X}(\mathbb{R}^2)$, (2.10) 是成立的. 根据双 Hilbert 变换在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 上的有界性, 得到

$$\|\widehat{H_2 H_1 f} - \widehat{H_2 H_1 \varphi}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^2)} \leq \|H_2 H_1 f - H_2 H_1 \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \|f - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon. \quad (2.11)$$

也即是说,

$$\|\widehat{-\operatorname{sgn}(\xi_1 \xi_2) f} - \widehat{-\operatorname{sgn}(\xi_1 \xi_2) \varphi}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^2)} \leq \|f - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon. \quad (2.12)$$

结合 (2.11) 和 (2.12), 有

$$\begin{aligned}
 \|\widehat{H_2 H_1 f} - \widehat{-\operatorname{sgn}(\cdot) f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^2)} &\leq \|\widehat{H_2 H_1 f} - \widehat{H_2 H_1 \varphi}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^2)} + \|\widehat{H_2 H_1 \varphi} - \widehat{-\operatorname{sgn}(\cdot) \varphi}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^2)} \\
 &\quad + \|\widehat{-\operatorname{sgn}(\cdot) \varphi} - \widehat{-\operatorname{sgn}(\cdot) f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^2)} \\
 &\leq 2\varepsilon.
 \end{aligned}$$

所以, 对几乎处处的 $\xi \in \mathbb{R}^2$, $\widehat{H_2 H_1 f}(\xi) = -\operatorname{sgn}(\xi_1 \xi_2) \widehat{f}(\xi)$ 成立. $\square$

2.2 $p = 1$ 的情形

从引理 2.1 到命题 2.3, 我们已经给出了双 Hilbert 变换作用在 $L^p(\mathbb{R}^2)$ ($1 < p < \infty$) 上的一些性质. 然而, 对于 $p = 1$ 的情形, 由于双 Hilbert 变换不是从 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 到 $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ 有界的 (参见文献 [12–14]). 本小节对双 Hilbert 变换作用在 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 上专门做出一些研究. 首先, 对于任意的 $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, 给出 $H_2 H_1 f$ 在分布意义下的性质.

定义 2.1 对任意的 $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, f 的双 Hilbert 变换 $H_2 H_1 f$ 由如下关系定义:

$$\langle H_2 H_1 f, \varphi \rangle = \langle f, H_2 H_1 \varphi \rangle, \quad (2.13)$$

其中 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, $H_2 H_1 \varphi$ 通过 (1.1) 来定义.

这里参照文献 [10] 中的 (5.24) 给出 (2.13) 的定义, (5.24) 给出了双 Hilbert 变换作用在 $\mathcal{D}'_{L^p}(\mathbb{R}^2)$ 上的定义, 其中 $p > 1$. 在该定义中, 关系式 (2.13) 对于任意的 $f \in \mathcal{D}'_{L^p}(\mathbb{R}^2)$ 和 $\varphi \in \mathcal{D}_{L^{p'}}(\mathbb{R}^2)$ 是成立的. 在这里, 我们断定对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ 和 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, 这个定义式也是成立的. 为了证明这个断言, 我们只需要证明 $L^1 \subset \mathcal{D}'_{L^p}$, $1 < p < \infty$. 事实上, 对任意的 $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, 定义

$$F_f(\varphi) := \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}_{L^{p'}}.$$

由于 φ 是有界的, 我们知道泛函 F_f 是有意义的. 泛函 F_f 的线性性是明显成立的. 进一步, 我们还要证明它的连续性. 假设一个序列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ 在 $\mathcal{D}_{L^{p'}}(\mathbb{R}^2)$ 中收敛到 0, 则当 $k \rightarrow \infty$ 时, φ_k 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致收敛到 0. 从而, 由 Lebesgue 控制收敛定理, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_f(\varphi_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\varphi_k(x)dx = 0.$$

这样我们证得了 $L^1 \subset \mathcal{D}'_{L^p}$. 容易看出 $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_{L^{p'}}$ 是成立的, 我们得到, 当 $f \in L^1$ 和 $\varphi \in \mathcal{S}$ 时,

$$\langle H_2 H_1 f, \varphi \rangle = \langle f, H_2 H_1 \varphi \rangle$$

成立. 关于这方面的更多内容, 可参见文献 [10].

下面给出双 Hilbert 变换作用在 $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ 上的一些结果. 由命题 2.3 可知, 对任意的 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, 等式

$$(H_2 H_1 \varphi)^\wedge(\xi) = -\operatorname{sgn}(\xi_1 \xi_2) \hat{\varphi}(\xi)$$

对几乎处处的 $\xi \in \mathbb{R}^2$ 成立. 依据这个结果, 我们得到如下的引理.

引理 2.2 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, 则有

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) H_2 H_1 \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} -\operatorname{sgn}(\xi_2 \xi_1) \hat{f}(\xi) \hat{\varphi}(-\xi) d\xi.$$

证明 令 $g(x) = H_2 H_1 \varphi(-x)$, 其中 $x \in \mathbb{R}^2$. 由于 $H_2 H_1$ 在 $\mathcal{D}_{L^{p'}}$ 上是同胚的, 因此, $g \in \mathcal{D}_{L^{p'}}$ 成立, 进而有 g 是连续的. 由 $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ 和 $g \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap C(\mathbb{R}^2)$, 推得

$$h := f * g \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap C(\mathbb{R}^2).$$

这样有 $\hat{h} = \hat{f} \hat{g} \in L^2(\mathbb{R}^2)$. 对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ 和几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^2$, 式子 $(\hat{f})^\vee(x) = f(x)$ 意味着, 对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^2$,

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{h}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

成立. 进而, 由 h 的连续性, 推出 $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$ 是逐点成立的. 所以,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) H_2 H_1 \varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) g(-x) dx = f * g(0) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi) (-\operatorname{sgn}(\xi_2 \xi_1) \hat{\varphi}(-\xi)) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} -\operatorname{sgn}(\xi_2 \xi_1) \hat{f}(\xi) \hat{\varphi}(-\xi) d\xi. \end{aligned}$$

证毕. □

接下来给出一个对应于命题 2.3 作用在 $L^1(\mathbb{R}^2)$ 上的一个结果.

命题 2.4 假设 $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ 且 $H_2 H_1 f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, 对几乎处处的 $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, 有

$$\widehat{H_2 H_1 f}(\xi) = -\operatorname{sgn}(\xi_2 \xi_1) \widehat{f}(\xi)$$

成立.

证明 首先, 我们证明

$$\widehat{H_2 H_1 f}(\xi) = -\operatorname{sgn}(\xi_2 \xi_1) \widehat{f}(\xi)$$

在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ 中是成立的. 对任意的 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, 由引理 2.2 及两个条件 $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ 和 $H_2 H_1 f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, 我们有

$$\begin{aligned} \langle \widehat{H_2 H_1 f}, \varphi \rangle &= \langle H_2 H_1 f, \widehat{\varphi} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) H_2 H_1 \widehat{\varphi}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} -\operatorname{sgn}(\xi_2 \xi_1) \widehat{f}(\xi) \widehat{\varphi}(-\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} -\operatorname{sgn}(\xi_2 \xi_1) \widehat{f}(\xi) \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

上式意味着

$$\widehat{H_2 H_1 f}(\xi) = -\operatorname{sgn}(\xi_2 \xi_1) \widehat{f}(\xi), \quad \text{在 } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) \text{ 内.} \quad (2.14)$$

由于方程 (2.14) 的两边都属于 $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, 所以对几乎处处的 $\xi \in \mathbb{R}^2$, 有

$$\widehat{H_2 H_1 f}(\xi) = -\operatorname{sgn}(\xi_2 \xi_1) \widehat{f}(\xi).$$

证毕. □

3 Bedrosian 等式

本节旨在建立 Bedrosian 等式 (1.2) 成立的充要条件. 给出充要条件之前, 我们先回顾一个分布的支集和在分布意义下 Fourier 变换的定义 (参见文献 [15]).

称一个分布 T 在一个开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 上有消失矩, 如果对任意的 $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, 有 $\operatorname{supp} \phi \subseteq \Omega$, 则等式 $T(\phi) := \langle T, \phi \rangle = 0$ 成立. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ 的支集的定义为, 使 T 在其上等于零的最大开集在 $\mathbb{R}^2$ 上的补集, 并记为 $\operatorname{supp} T$. 这个定义与当 T 是一个连续函数时的消失矩的定义是一致的. $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ 的 Fourier 变换是由下式定义的一个缓增分布:

$$\langle \widehat{f}, \phi \rangle = \langle f, \widehat{\phi} \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

为了给出 Bedrosian 等式 (1.2) 成立的充要条件, 我们需要给出如下的一些结果.

引理 3.1 令 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < \infty$, 则

$$\operatorname{supp} (f - H_2 H_1 f)^\wedge \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus (Q_2 \cup Q_4) \quad (3.1)$$

和

$$\text{supp}(f + H_2 H_1 f)^\wedge \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus (Q_1 \cup Q_3) \quad (3.2)$$

成立.

证明 对关系式 (3.1), 我们只需要证明, 对任意的 $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } \phi \subseteq Q_2 \cup Q_4$, 等式

$$\langle (f - H_2 H_1 f)^\wedge, \phi \rangle = 0 \quad (3.3)$$

成立. 为此, 我们计算 (3.3) 的左边表达式如下:

$$\begin{aligned} \langle (f - H_2 H_1 f)^\wedge, \phi \rangle &= \langle f - H_2 H_1 f, \widehat{\phi} \rangle = \langle f, \widehat{\phi} \rangle - \langle H_2 H_1 f, \widehat{\phi} \rangle \\ &= \langle f, \widehat{\phi} \rangle - \langle f, H_2 H_1 \widehat{\phi} \rangle = \langle f, \widehat{\phi} - H_1 H_2 \widehat{\phi} \rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

计算 (3.4) 的最后一项, 可得

$$\begin{aligned} (\widehat{\phi} - H_2 H_1 \widehat{\phi})^\vee(x) &= (\widehat{\phi} - H_2 H_1 \widehat{\phi})^\wedge(-x) \\ &= \widehat{\widehat{\phi}}(-x) + \text{sgn}(x_1 x_2) \widehat{\widehat{\phi}}(-x) \\ &= \phi(x) + \text{sgn}(x_1 x_2) \phi(x) = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中, 我们用到了

$$(\widehat{\phi})^\wedge(x) = (\widehat{\phi})^\vee(-x) = \phi(-x)$$

和假设条件 $\text{supp } \phi \subseteq Q_2 \cup Q_4$. 根据 (3.4) 和 (3.5), 我们得到了 (3.3). 运用类似的方法, 我们能证得

$$\text{supp}(f + H_2 H_1 f)^\wedge \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus (Q_1 \cup Q_3),$$

(3.2) 成立. □

引理 3.2 令 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < \infty$. 若 $\text{supp } \widehat{f} \subseteq Q_1 \cup Q_3$, 则对几乎处处的 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, 下式成立:

$$H_2 H_1 f(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2).$$

同样, 若 $\text{supp } \widehat{f} \subseteq Q_2 \cup Q_4$, 则对几乎处处的 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $H_2 H_1 f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$ 成立.

证明 只需证前半部分. 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, 且 $\text{supp } \widehat{f} \subseteq Q_1 \cup Q_3$. 对任意的 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, 且

$$\text{supp } \varphi \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus (Q_1 \cup Q_3),$$

我们有

$$\langle (H_2 H_1 f)^\wedge, \varphi \rangle = \langle H_2 H_1 f, \widehat{\varphi} \rangle = \langle f, H_2 H_1 \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{f}, (H_2 H_1 \widehat{\varphi})^\vee \rangle = \langle \widehat{f}(\cdot), -\text{sgn}(\cdot) \varphi(\cdot) \rangle = 0,$$

在最后一个等式中, 我们用到了

$$\text{supp } f \subseteq Q_1 \cup Q_3, \quad \text{supp } \varphi \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus (Q_1 \cup Q_3).$$

为了证明 $H_2 H_1 f = -f$, 我们只需要验证, 对任意的 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } \varphi \subseteq Q_1 \cup Q_3$, 方程 $\langle (f + H_2 H_1 f)^\wedge, \varphi \rangle = 0$ 成立. 这是引理 3.1 的一个简单结果. 后半部分可以类似证明得到. □

下面也给出引理 3.2 的反面结果, 它在 $\widehat{f}$ 的支集上有包含或不包含坐标轴上所有点的差别.

注 3.1 如果 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < \infty$, 则

$$H_2 H_1 f = -f \quad \text{或} \quad H_2 H_1 f = f$$

意味着

$$\text{supp } \widehat{f} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus (Q_2 \cup Q_4) \quad \text{或} \quad \text{supp } \widehat{f} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus (Q_1 \cup Q_3)$$

分别成立.

这个注记通过下面的式子来推得. 对任意的 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } \varphi \subset Q_2 \cup Q_4$, 有

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle = \frac{1}{2}(\langle f, \widehat{\varphi} \rangle - \langle -f, \widehat{\varphi} \rangle) = \frac{1}{2}(\langle f, \widehat{\varphi} \rangle - \langle H_2 H_1 f, \widehat{\varphi} \rangle) = \frac{1}{2}\langle f, \widehat{\varphi} - H_2 H_1 \widehat{\varphi} \rangle$$

成立. 再运用结论

$$(\widehat{\varphi} - H_2 H_1 \widehat{\varphi})^\vee(x) = (1 + \text{sgn}(x_1 x_2))\varphi(x) = 0,$$

我们得到证明的前半部分成立. 另一部分也可以类似得到.

引理 3.3 令 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^2)$, 且 p 和 q 满足关系式 (1.3), 若

$$\text{supp } \widehat{f} \cup \text{supp } \widehat{g} \subseteq Q_i,$$

则 $\text{supp } (fg)^\wedge \subseteq Q_i$ 成立, 其中 $i = 1, 2, 3, 4$.

证明 根据 Hölder 不等式可知, 存在一个正实数 $r \geq 1$ 满足 $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, 使得 $fg \in L^r(\mathbb{R}^2)$ 成立. 对于任意的 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, 有

$$\langle (fg)^\wedge, \varphi \rangle = \langle fg, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} g(t)f(t)\widehat{\varphi}(t)dt. \quad (3.6)$$

选取一个函数 $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, 满足 $\widehat{\psi}(0) = 1$, 并令

$$f_n(x) = \psi_n * f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi_n(x-t)f(t)dt,$$

其中 $\psi_n(t) = n^2\psi(nt)$, $n \in \mathbb{N}$.

注意到, $f \in L^p$, 且 $\psi_n \in L^{p'}$, 因此可得 $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. 对任意的非负整数 k , $f_n^{(k)} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, 而且, 当 n 趋近于无穷时, f_n 依 $L^p(\mathbb{R}^2)$ 范收敛到 f . 再由 Hölder 不等式, 我们得出 $f_n g$ 在 $L^r(\mathbb{R}^2)$ 中收敛到 fg . 相应地,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} g(t)f_n(t)\widehat{\varphi}(t)dt = \int_{\mathbb{R}^2} g(t)f(t)\widehat{\varphi}(t)dt.$$

假设 $\text{supp } \widehat{f} \cup \text{supp } \widehat{g} \subseteq Q_i$, $1 \leq i \leq 4$, 为了证明 $\text{supp } (fg)^\wedge \subseteq Q_i$, 我们只需要证明, 对任意的 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } \varphi \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus Q_i$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(t)f_n(t)\widehat{\varphi}(t)dt = 0.$$

对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 有 $f_n \in C^\infty$ 且有界, 因此, $f_n \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ 成立. 现在应用 (3.6), 可得

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(t) f_n(t) \widehat{\varphi}(t) dt = \langle \widehat{g}, (f_n \widehat{\varphi})^\vee \rangle, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

现在计算 $(f_n \widehat{\varphi})^\vee(x)$ 如下:

$$\begin{aligned} (f_n \widehat{\varphi})^\vee(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} f_n(\xi) \widehat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} f_n(\xi) (\varphi(x + \cdot))^\wedge(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f_n}(\xi) \varphi(x + \xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\xi) \widehat{\psi}_n(\xi) \varphi(x + \xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\xi) \check{\psi}\left(\frac{-\xi}{n}\right) \varphi(x + \xi) d\xi, \end{aligned}$$

在上面的最后一个等式中, 我们用到了如下一个事实:

$$\widehat{\psi}_n(\xi) = n^2 \widehat{\psi}(n\xi)(\xi) = \widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{n}\right) = \check{\psi}\left(\frac{-\xi}{n}\right).$$

这样, $(f_n \widehat{\varphi})^\vee(x)$ 可以被重写为

$$(f_n \widehat{\varphi})^\vee(x) = \left\langle \widehat{f}(\cdot), \check{\psi}\left(\frac{-\cdot}{n}\right) \varphi(x + \cdot) \right\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (3.8)$$

从 (3.8) 可知, 对任意的 $1 \leq i \leq 4$, 当 $x \in Q_i$ 时, 为了使 $\widehat{f} \neq 0$ 成立, 我们需要证明当 $\cdot \in Q_i$, 也即 $x + \cdot \in Q_i$ 时, 表达式 $\varphi(x + \cdot) = 0$ 成立. 进而有

$$\text{supp } (f_n \widehat{\varphi})^\vee(x) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus Q_i.$$

再考虑到条件 $\text{supp } \widehat{g} \subseteq Q_i$, 我们有

$$\langle \widehat{g}, (f_n \widehat{\varphi})^\vee \rangle = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.9)$$

综合 (3.7) 和 (3.9), 得到结论 $\text{supp } (fg)^\wedge \subseteq Q_i$, $1 \leq i \leq 4$. 从而证明了该引理. $\square$

现在对于 $h \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < \infty$, 引入分解式 $h = h_+ + h_-$, 其中

$$h_+ = \frac{h + H_2 H_1 h}{2}, \quad h_- = \frac{h - H_2 H_1 h}{2}. \quad (3.10)$$

显然, h_+ 和 h_- 仍然属于函数空间 $L^p(\mathbb{R}^2)$.

定理 3.1 令 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^2)$, 且 p 和 q 满足关系式 (1.3), 则 f 和 g 满足 Bedrosian 等式 (1.2) 当且仅当

$$H_2 H_1(f_- g_-) + H_2 H_1(f_+ g_-) = -f_- g_- - f_+ g_-.$$

证明 利用由 (3.10) 定义的分解式, 以及 $f = f_+ + f_-$ 和 $g = g_+ + g_-$, Bedrosian 等式 (1.2) 可以被重写为

$$H_2 H_1(f_+ g_+ + f_- g_- + f_+ g_- + f_- g_+) = f_+ H_2 H_1 g_+ + f_- H_2 H_1 g_- + f_+ H_2 H_1 g_- + f_- H_2 H_1 g_+, \quad (3.11)$$

将 H_2H_1 作用在 (3.10) 中的 g_+ 上, 再用上结论 $(H_2H_1)^2f = f$, 我们有

$$H_2H_1g_+ = H_2H_1\left(\frac{g + H_2H_1g}{2}\right) = \frac{1}{2}(H_2H_1g + (H_2H_1)^2g) = \frac{1}{2}(g + H_2H_1g) = g_+. \quad (3.12)$$

类似地,

$$H_2H_1g_- = -g_-. \quad (3.13)$$

易知, 函数 f 也能得到相应的结果. 将 (3.12)、(3.13) 和 f 得到的相应结果代入 (3.11) 中, 我们得到如下关于 (3.11) 等价的表达式:

$$H_2H_1(f_+g_+ + f_-g_- + f_+g_- + f_-g_+) = f_+g_+ - f_-g_- - f_+g_- + f_-g_+. \quad (3.14)$$

将等式 (3.14) 的两边同时进行双 Hilbert 变换, 可得

$$f_+g_+ + f_-g_- + f_+g_- + f_-g_+ = H_2H_1(f_+g_+ - f_-g_- - f_+g_- + f_-g_+). \quad (3.15)$$

然后结合 (3.14) 和 (3.15) 推得

$$H_2H_1(f_-g_-) + H_2H_1(f_+g_-) = -f_-g_- - f_+g_-.$$

这样我们得到了该定理的证明. □

运用定理 3.1, 我们得到下面的两个推论.

推论 3.1 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^2)$, 而且 p 和 q 满足关系式 (1.3), 如果对任意的 $1 \leq i \leq 4$, $\text{supp} \hat{f} \subseteq Q_i$ 和 $\text{supp} \hat{g} \subseteq Q_i$ 成立, 则 Bedrosian 等式 (1.2) 成立.

证明 我们只对 $i = 1$ 的情形进行证明. 运用引理 3.2 可知, $\text{supp} \hat{f} \subseteq Q_1 \subset Q_1 \cup Q_3$ 意味着 $H_2H_1f(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2)$ 成立, 进而 $f_+ = 0$ 和 $f = f_-$ 成立.

所以, 当 $\text{supp} \hat{f} \subseteq Q_1$ 和 $\text{supp} \hat{g} \subseteq Q_1$ 成立时, 我们得到 $f_+ = g_+ = 0$. 运用引理 3.3, 有

$$\text{supp} (fg)^\wedge = \text{supp} (f_-g_-)^\wedge \subseteq Q_1,$$

根据引理 3.2, 有 $H_2H_1(f_-g_-) = -f_-g_-$. 最后, 运用定理 3.1, 我们得到想要的结果. 其他的各种情形通过类似的方法也能得到证明. □

根据第 1 节区间 $I^- \cdot \Omega$ 的定义, 我们给出关于这个区间的一个注记 (参见文献 [4]).

注 3.2 (i) 坐标原点要么是区间 $I \cdot \Omega$ 的一个内点, 要么是它的一个端点, 区间 $I^- \cdot \Omega$ 也有类似的结论. (ii) 一个确定区间 $I \cdot \Omega$ 和 $I^- \cdot \Omega$ 的方式如下. 设 $l := \inf\{x \in \Omega\}$, $L := \sup\{x \in \Omega\}$, $l^* := \min\{0, l\}$, 且 $L^* := \max\{0, L\}$, 则区间的表示为 $I \cdot \Omega = [l^*, L^*]$ 和 $I^- \cdot \Omega = [-L^*, -l^*]$. 如果上述哪个区间的端点是无穷, 我们需将相应的中括号改为小括号.

运用推论 3.1 和函数变换, 我们得到如下函数支集在一般区域上, Bedrosian 等式 (1.2) 成立的充要条件.

推论 3.2 假设 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^2)$, 且 p 和 q 满足关系式 (1.3). 如果

$$\text{supp}(\hat{f}) \subseteq (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \quad \text{和} \quad \text{supp}(\hat{g}) \subseteq (\mathbb{R} \setminus I^- \cdot (a_1, b_1)) \times (\mathbb{R} \setminus I^- \cdot (a_2, b_2))$$

成立, 其中常数 a_1 、 a_2 、 b_1 和 b_2 可以是无穷, 则 Bedrosian 等式 (1.2) 是成立的.

证明 事实上, 当 $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ 恰好是某坐标象限 Q_i ($1 \leq i \leq 4$) 时, 该结果正好是推论 3.1. 对于其余的情形, 我们分下面的几种情形分别考虑.

情形 1 满足下面四个条件中的一个:

- (i) $\text{supp} \hat{f} \subseteq (-a_1, \infty) \times (-a_2, \infty)$ 且 $\text{supp} \hat{g} \subseteq (a_1, \infty) \times (a_2, \infty)$, 其中 $a_1, a_2 > 0$;
- (ii) $\text{supp} \hat{f} \subseteq (-\infty, b_1) \times (-\infty, b_2)$ 且 $\text{supp} \hat{g} \subseteq (-\infty, -b_1) \times (-\infty, -b_2)$, 其中 $b_1, b_2 > 0$;
- (iii) $\text{supp} \hat{f} \subseteq (-a_1, \infty) \times (-\infty, b_2)$ 且 $\text{supp} \hat{g} \subseteq (a_1, \infty) \times (-\infty, -b_2)$, 其中 $a_1, b_2 > 0$;
- (iv) $\text{supp} \hat{f} \subseteq (-\infty, a_2) \times (-b_1, \infty)$ 且 $\text{supp} \hat{g} \subseteq (-\infty, -a_2) \times (b_1, \infty)$, 其中 $a_2, b_1 > 0$.

这里只对 (i) 给出证明. 令 $f_1(x) = f(x)e^{2\pi i x_1 a_1} e^{2\pi i x_2 a_2}$ 且 $g_1(x) = g(x)e^{-2\pi i x_1 a_1} e^{-2\pi i x_2 a_2}$, 我们易得到

$$f_1 \in L^p(\mathbb{R}^2), \quad g_1 \in L^q(\mathbb{R}^2), \quad \text{supp} \hat{f}_1 = Q_1, \quad \text{supp} \hat{g}_1 = Q_1.$$

由于 $\text{supp} \hat{g} \subseteq (a_1, \infty) \times (a_2, \infty) \subseteq Q_1$, 从引理 3.2 和 3.3 得到

$$H_2 H_1(fg) = H_2 H_1(f_1 g_1) = -f_1 g_1 = -fg = f(-g) = f H_2 H_1 g.$$

如果 (ii)–(iv) 中的一个得到满足, 通过类似的方法我们可以给出证明.

情形 2 假设 $\text{supp} \hat{f} \subseteq (-a_1, b_1) \times (-a_2, b_2)$ 且 $\text{supp} \hat{g} \subseteq (\mathbb{R} \setminus I^- \cdot (-a_1, b_1)) \times (\mathbb{R} \setminus I^- \cdot (-a_2, b_2))$, 即 $\text{supp} \hat{g} \subseteq ((-\infty, -b_1) \cup (a_1, \infty)) \times ((-\infty, -b_2) \cup (a_2, \infty))$, 其中 $a_1, b_1, a_2, b_2 > 0$.

为了更清楚起见, 我们分割 $\text{supp} \hat{g}$ 的区间如下:

$$\begin{aligned} \text{supp} \hat{g} &\subseteq ((-\infty, -b_1) \times (-\infty, -b_2)) \cup ((-\infty, -b_1) \times (a_2, \infty)) \\ &\quad \cup ((a_1, \infty) \times (-\infty, -b_2)) \cup ((a_1, \infty) \times (a_2, \infty)) \\ &=: U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4, \end{aligned}$$

则条件 $\text{supp} \hat{f} \subseteq (-a_1, b_1) \times (-a_2, b_2)$, 当 $\text{supp} \hat{g}$ 分别在 U_1 、 U_2 、 U_3 或 U_4 中时, 正好对应于情形 1 的 (ii)、(iv)、(iii) 或 (i).

情形 3 假设 $\text{supp} \hat{f} \subseteq (-a_1, b_1) \times (-a_2, \infty)$, 而且

$$\text{supp} \hat{g} \subseteq ((-\infty, -b_1) \times (a_2, \infty)) \cup ((a_1, \infty) \times (a_2, \infty)) = M_1 \cup M_2,$$

则条件 M_1 对应于情形 1 中的 (iv), 且条件 M_2 对应于情形 1 中的 (i). 其余情形可以类似得到对应, 并得到证明.

这样, 我们得到了该推论的证明. □

参考文献

- 1 Cohen L. Time-Frequency Analysis. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995
- 2 Stark H, Bennett W, Arm M. Design considerations in power spectra measurements by diffraction of coherent light. Appl Opt, 1969, 8: 2165–2171
- 3 Bedrosian E. A product theorem for Hilbert transform. Proc IEEE, 1963, 51: 868–869
- 4 Xu Y, Yan D. The Bedrosian identity for the Hilbert transform of product functions. Proc Amer Math Soc, 2006, 34: 2719–2728
- 5 Qian T, Xu Y, Yan D, et al. Fourier spectrum characterization of Hardy spaces and applications. Proc Amer Math Soc, 2009, 137: 971–980

- 6 Yang L, Zhang H. The Bedrosian identity for $\mathbf{H}^p$ functions. J Math Anal Appl, 2008, 345: 975–984
- 7 Yu B, Zhang H. The Bedrosian identity and homogeneous semi-convolution equations. J Integral Equations Appl, 2008, 20: 527–568
- 8 Wang S. Simple proofs of the Bedrosian equality for the Hilbert transform. Sci China Ser A, 2009, 52: 507–510
- 9 Fefferman R, Stein E M. Singular integrals on product spaces. Adv Math, 1982, 45: 117–143
- 10 Pandey J N. The Hilbert Transform of Schwartz Distributions and Applications. New York: John Wiley & Sons, 1996
- 11 Butzer P L, Nessel R J. Fourier Analysis and Approximation, Volume 1. New York: Academic Press, 1971
- 12 Fefferman C. Estimates for double Hilbert transforms. Studia Math, 1972, 44: 1–15
- 13 Grafakos L. Classical and Modern Fourier Analysis. Beijing: China Machine Press, 2006
- 14 Stein E M. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton: Princeton University Press, 1993
- 15 Strichartz R. A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms. Boca Raton: CRC Press, 1994

The double Hilbert transform and the double Bedrosian identity of the product functions

Xiaona Cui & Dunyan Yan

Abstract We give some properties of the double Hilbert transform, and then establish the necessary and sufficient conditions for $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^2)$, $p^{-1} + q^{-1} \leq 1$ to satisfy the double Bedrosian identity $H_2H_1(fg) = fH_2H_1g$, where H_2H_1 denotes the double Hilbert transform.

Keywords double Hilbert transform, Bedrosian identity, product functions

MSC(2010) 42B20, 42B35

doi: 10.1360/N012018-00140