弹塑性大变形问题的改进的无单元Galerkin方法

蔡小杰¹, 彭妙娟¹, 程玉民^{2*}

1. 上海大学土木工程系, 上海 200444;

2. 上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072

*联系人, E-mail: ymcheng@shu.edu.cn

收稿日期: 2017-08-29; 接受日期: 2017-11-15; 网络发表日期: 2018-01-09

国家自然科学基金(编号: 11571223)资助项目

摘要 基于改进的移动最小二乘法, 建立了弹塑性大变形问题的改进的无单元Galerkin方法. 改进的移动最小二乘法克服了移动最小二乘法有时形成病态或奇异方程组的缺点. 基于改进的移动最小二乘法建立形函数, 根据弹塑性大变形问题的Galerkin弱形式建立离散方程, 利用罚函数法施加位移边界条件, 推导了弹塑性大变形问题的改进的无单元Galerkin方法的公式, 采用Newton-Raphson迭代法进行求解. 通过数值算例, 讨论了权函数、影响域比例参数、罚因子、节点数和迭代步数对计算精度的影响, 结果显示, 相对于四次和五次样条函数, 选取三次样条函数作为权函数具有更高精度; 当 $d_{\max}=3.6$, $\alpha=10^{10} \times E$ 时本文方法具有较高精度. 考虑不同的节点分布和加载步数, 分析了本文方法的收敛性. 数值结果验证了本文方法的有效性, 说明了该方法具有提高计算效率的优点.

关键词 无网格方法, 改进的移动最小二乘法, 改进的无单元Galerkin方法, 弹塑性大变形

PACS: 02.60.Cb, 02.70.-c, 46.15.-x, 46.35.+z

1 引言

弹塑性大变形问题是一类材料和几何双重非线性问题, 利用解析方法难以得到其解. 目前求解这类问题的数值方法包括有限元和边界元等. 但这类方法过于依赖网格, 想得到较好的数值解就需要进行网格重构, 计算量较大, 网格的重划分也会产生累计误差. 无网格方法中试函数的构造是建立在一系列离散的节点上, 场点和节点之间的联系不再通过单元实现, 避免了有限元和边界元对单元或网格的依赖^[1], 在求解大变形问题方面具有一定优势.

Belytschko等人^[2]用无单元Galerkin方法(Element-Free Galerkin Method, EFG)解决了三维几何和材料非线性的动力学问题. Chen等人^[3]用无单元Galerkin方法研究了材料高速撞击发生弹塑性大变形的的问题. Rossi和Alves^[4]用改善了边界条件的无单元Galerkin方法研究了体积不变情况下的弹塑性大变形问题. 李冬明等人^[5]建立了弹塑性大变形问题的复变量无单元Galerkin方法. Chen等人^[6]用重构核粒子法分析了几种超弹性和弹塑性大变形问题. Chen和Cheng^[7]建立了弹塑性大变形问题的复变量重构核粒子法. Yao等人^[8]将无网格局部Petrov-Galerkin方法应用于大变形和大转动的

引用格式: 蔡小杰, 彭妙娟, 程玉民. 弹塑性大变形问题的改进的无单元Galerkin方法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 024701
Cai X J, Peng M J, Cheng Y M. The improved element-free Galerkin method for elastoplasticity large deformation problems (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2018, 48: 024701, doi: [10.1360/SSPMA2017-00231](https://doi.org/10.1360/SSPMA2017-00231)

弹塑性问题. Han等人^[9]应用无网格局部Petrov-Galerkin方法分析了静态和动态的弹塑性大变形问题.

无单元Galerkin方法采用移动最小二乘法(Moving Least-Squares Approximation, MLS)构造试函数, 这种方法具有很高的计算精度, 其缺点是计算过程中形成的方程组有时是病态的或者奇异的, 并且方程组求解时矩阵求逆耗费时间长. 程玉民课题组^[10-12]提出了改进的移动最小二乘法(Improved Moving Least-Squares Approximation, IMLS), 采用正交函数作为基函数, 避免了病态或者奇异方程组的出现, 而且计算过程中不需要求矩阵的逆就可得到方程组的解, 提高了计算效率. 将改进的移动最小二乘法和Galerkin弱形式结合而建立的改进的无单元Galerkin方法(Improved Element-Free Galerkin Method, IIEFG)具有精度高、计算速度快及不形成病态或者奇异方程组的优点而被广泛应用于求解各种问题. 张赞等人提出了断裂力学^[10]、势问题^[11,12]、弹性力学^[13]、波动方程^[14]、弹性动力学^[15]和瞬态热传导^[16]等问题的改进的无单元Galerkin方法, 程荣军等人^[17,18]利用改进的无单元Galerkin方法求解波动方程和广义Camassa-Holm方程, 彭妙娟等人^[19]研究了三维黏弹性问题的改进的无单元Galerkin方法, 并将改进的无单元Galerkin方法应用于机场复合道面分析.

弹塑性大变形问题的复杂性要求无网格方法布置足够多的节点提高计算精度, 导致了无网格方法计算量太大, 因此需要提高计算效率. 虽然传统的无单元Galerkin方法在计算弹塑性大变形问题时具有较高的计算精度, 但是计算效率较低. 而改进的无单元Galerkin方法克服了传统的无单元Galerkin方法的缺点, 提高了计算效率.

本文基于改进的移动最小二乘法建立弹塑性大变形问题的无单元Galerkin方法. 基于增量分析的方法, 采用罚函数法引入位移边界条件, 基于完全Lagrange格式的弹塑性大变形问题的Galerkin弱形式, 用Newton-Raphson迭代进行求解. 最后通过数值算例, 验证本文方法的有效性, 讨论了权函数、影响域比例参数、罚因子、节点数和迭代步数对本文方法计算精度的影响, 说明了本文方法具有较高的计算效率.

2 改进的移动最小二乘法

在移动最小二乘法中, 取试函数

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x} \in \Omega), \quad (1)$$

这里 m 为基函数的个数, $p_i(\mathbf{x})$ 为基函数, $a_i(\mathbf{x})$ 为相应的系数,

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})), \quad (2)$$

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = (a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \dots, a_m(\mathbf{x})). \quad (3)$$

在点 $\mathbf{x}$ 的邻域内的局部逼近定义为

$$u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^m p_i(\bar{\mathbf{x}}) a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad (4)$$

其中, $\bar{\mathbf{x}}$ 为点 $\mathbf{x}$ 局部邻域内的点.

定义泛函

$$J = \sum_{l=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \left[\sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}_l) a_i(\mathbf{x}) - u_l \right]^2, \quad (5)$$

其中, $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l)$ 为权函数, $\mathbf{x}_l$ 为影响域覆盖点 $\mathbf{x}$ 的节点, n 是影响域覆盖点 $\mathbf{x}$ 的节点数, $u_l = u(\mathbf{x}_l)$.

由

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0, \quad (6)$$

可得

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \quad (7)$$

其中,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P}, \quad (8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}), \quad (9)$$

$$\mathbf{u}^T = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (10)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

这样, 逼近函数 $u^h(\mathbf{x})$ 的表达式为

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \sum_{l=1}^n \Phi_l(\mathbf{x}) u_l, \quad (13)$$

其中, $\Phi(\mathbf{x})$ 为形函数,

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= (\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)) \\ &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}).\end{aligned}\quad (14)$$

移动最小二乘法的缺点在于方程(6)有时是病态的或者奇异的, 并且在对矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 求逆的过程中需要花费大量的时间. 为了解决这些问题, 在改进的移动最小二乘法中, 采用带权正交函数作为基函数, 这样可得到:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^*(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (15)$$

其中,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^*(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(p_1, p_1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(p_2, p_2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(p_m, p_m)} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (16)$$

可见改进的移动最小二乘法不需对矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 求逆.

将式(15)代入式(1)得到:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \tilde{\Phi}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \sum_{l=1}^n \tilde{\Phi}_l(\mathbf{x})u_l, \quad (17)$$

其中, $\tilde{\Phi}(\mathbf{x})$ 为形函数,

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\mathbf{x}) &= (\tilde{\Phi}_1(\mathbf{x}), \tilde{\Phi}_2(\mathbf{x}), \dots, \tilde{\Phi}_n(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^*(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}).\end{aligned}\quad (18)$$

在求系数 $a_l(\mathbf{x})$ 时, 不用求矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 的逆, 避免了求解病态或奇异的方程组, 这样就可以提高计算效率和精度.

3 弹塑性大变形问题的基本方程

在增量形式下各向同性的强化材料的应力应变关系为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (19)$$

对于平面应力问题, 在弹性阶段

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

在塑性阶段

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{ep} = \frac{E}{Q} \begin{bmatrix} \sigma'_{22}{}^2 + 2P & -\sigma'_{11}\sigma'_{22} + 2\nu P & -\frac{\sigma'_{11} + \nu\sigma'_{22}}{1+\nu}\sigma_{12} \\ -\sigma'_{11}\sigma'_{22} + 2\nu P & \sigma'_{11} + 2P & -\frac{\sigma'_{22} + \nu\sigma'_{11}}{1+\nu}\sigma_{12} \\ -\frac{\sigma'_{11} + \nu\sigma'_{22}}{1+\nu}\sigma_{12} & -\frac{\sigma'_{22} + \nu\sigma'_{11}}{1+\nu}\sigma_{12} & \frac{R}{2(1+\nu)} + \frac{2H'}{9E}(1-\nu)\bar{\sigma}^2 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

其中,

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} = \frac{EE'}{E-E'}, \quad (22)$$

$$P = \frac{2H'}{9E}\bar{\sigma}^2 + \frac{\sigma_{12}^2}{1+\nu}, \quad (23)$$

$$R = \sigma'_{11}{}^2 + 2\nu\sigma'_{11}\sigma'_{22} + \sigma'_{22}{}^2, \quad (24)$$

$$Q = R + 2(1-\nu^2)P, \quad (25)$$

$$\sigma'_{11} = \sigma_{11} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{3}, \quad (26)$$

$$\sigma'_{22} = \sigma_{22} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{3}. \quad (27)$$

其中, H' 为材料的塑性模量, E' 为切线模量, σ'_{11} 和 σ'_{22} 为应力偏量.

对于平面应变问题, 只要将平面应力问题中弹性

阶段的 $\mathbf{D}_e$ 和塑性阶段的 $\mathbf{D}_{ep}$ 中的 E 换成 $\frac{E}{1-\nu^2}$, ν 换成 $\frac{\nu}{1-\nu}$ 即可.

假定物体在 t 时刻的位移为 u_i , 应变为 ε_{ij} 和应力为 τ_{ij} . 从时刻 t 到 $t+\Delta t$ 构形, 物体单位体积的体力为 ${}^{t+\Delta t}b_i$, 在应力边界 Γ_t 上单位面积的面力为 ${}^{t+\Delta t}\bar{t}_i$, 位移边界 Γ_u 上的位移为 $\bar{u}_i$, 需要求时刻 $t+\Delta t$ 构形的位移 ${}^{t+\Delta t}u_i$ 、应变 ${}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}$ 和应力 ${}^{t+\Delta t}\tau_{ij}$, 相应的边界条件为

$$u_i = \bar{u}_i, \quad (\mathbf{x} \in \Gamma_u), \quad (28)$$

$${}^{t+\Delta t}\bar{t}_i = {}^{t+\Delta t}\tau_{ij}n_j, \quad {}^{t+\Delta t}\bar{t}_i = {}^{t+\Delta t}\bar{t}_i, \quad (\mathbf{x} \in \Gamma_u), \quad (29)$$

其中, ${}^{t+\Delta t}n_j$ 为边界外法线方向余弦.

采用罚函数法施加位移边界条件, 弹塑性大变形

问题的Galerkin弱形式为

$$\begin{aligned} & \int_{t+\Delta t}^{\Omega} \tau_{ij} \cdot \delta_{t+\Delta t} e_{ij} d\Omega \\ & + \alpha \int_{t+\Delta t}^{\Gamma_u} \delta u_i \cdot (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma \\ & = \int_{t+\Delta t}^{\Omega} \rho \cdot \delta_{t+\Delta t} b_k \cdot \delta u_k d\Omega \\ & + \int_{t+\Delta t}^{\Gamma_t} \bar{t}_k \cdot \delta u_k d\Gamma, \end{aligned} \quad (30)$$

其中, α 为罚因子, τ_{ij} 为时刻 $t+\Delta t$ 构形的Cauchy应力, $\delta_{t+\Delta t} e_{ij}$ 为相应的应变变分, ρ 为时刻 $t+\Delta t$ 构形物体的质量密度, b_k 为时刻 $t+\Delta t$ 构形物体单位体积的体力, $\bar{t}_k$ 为时刻 $t+\Delta t$ 构形物体单位面积的面力, δu_k 为从时刻 t 到 $t+\Delta t$ 构形的位移增量 u_k 的变分.

采用完全Lagrange格式, 方程(30)转化为

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} {}^{t+\Delta t}_0 S_{ij} \cdot \delta {}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_{ij} d\Omega \\ & + \alpha \int_{\Gamma_u} \delta u_i \cdot (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma \\ & = \int_{\Omega} {}^0 \rho \cdot {}^{t+\Delta t}_0 b_k \cdot \delta u_k d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_t} {}^{t+\Delta t}_0 \bar{t}_k \cdot \delta u_k d\Gamma, \end{aligned} \quad (31)$$

其中, ${}^{t+\Delta t}_0 S_{ij}$ 和 ${}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_{ij}$ 分别为时刻 $t+\Delta t$ 构形的Kirchhoff应力和Green应变, 以初始构形为参考构形; ${}^{t+\Delta t}_0 b_k$ 为单位初始体积的体力; ${}^{t+\Delta t}_0 \bar{t}_k$ 为单位初始面积的面力.

对时刻 $t+\Delta t$ 构形的Kirchhoff应力张量和Green应变张量进行分解, 即:

$${}^{t+\Delta t}_0 S_{ij} = {}^t_0 S_{ij} + {}_0 S_{ij}, \quad (32)$$

$${}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_{ij} = {}^t_0 \varepsilon_{ij} + {}_0 \varepsilon_{ij}, \quad (33)$$

其中, ${}_0 S_{ij}$ 和 ${}_0 \varepsilon_{ij}$ 分别为从时刻 t 到 $t+\Delta t$ 构形的Kirchhoff应力增量和Green应变增量, 均参考初始构形. Green应变的增量可以表示为

$${}_0 \varepsilon_{ij} = {}_0 e_{ij} + {}_0 \eta_{ij}, \quad (34)$$

且 ${}_0 e_{ij}$ 和 ${}_0 \eta_{ij}$ 分别是Green应变增量关于位移增量 u_i 的线性项和二次项, 即:

$${}_0 e_{ij} = \frac{1}{2} ({}_0 u_{i,j} + {}_0 u_{j,i} + {}^t_0 u_{k,i} {}_0 u_{k,j} + {}^t_0 u_{k,j} {}_0 u_{k,i}), \quad (35)$$

$${}_0 \eta_{ij} = \frac{1}{2} ({}_0 u_{k,i} {}_0 u_{k,j}). \quad (36)$$

这样, 方程(31)可以改写成

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} {}^0 S_{ij} \cdot \delta {}^0 \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} {}^t_0 S_{ij} \cdot \delta {}^t_0 \eta_{ij} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} {}^t_0 S_{ij} \cdot \delta {}^t_0 e_{ij} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_u} \delta u_i \cdot (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma \\ & = \int_{\Omega} {}^0 \rho \cdot {}^{t+\Delta t}_0 b_k \cdot \delta u_k d\Omega + \int_{\Gamma_t} {}^{t+\Delta t}_0 \bar{t}_k \cdot \delta u_k d\Gamma. \end{aligned} \quad (37)$$

当加载步长足够小时, 可以假设应力增量和应变增量为线性关系, 即:

$${}_0 S_{ij} = {}_0 D_{ijkl} {}^0 \varepsilon_{kl}, \quad (38)$$

其中, ${}_0 D_{ijkl}$ 为参考初始构形的切线本构张量.

采用近似表达式

$$\delta {}^0 \varepsilon_{ij} = \delta {}^0 e_{ij}, \quad (39)$$

$${}_0 S_{ij} = {}_0 D_{ijkl} {}^0 e_{kl}. \quad (40)$$

式(37)可写成

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} {}_0 D_{ijkl} {}^0 e_{kl} \delta {}^0 e_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} {}^t_0 S_{ij} \cdot \delta {}^t_0 \eta_{ij} d\Omega \\ & + \alpha \int_{\Gamma_u} \delta u_i \cdot (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma \\ & = \int_{\Omega} {}^0 \rho \cdot {}^{t+\Delta t}_0 b_k \cdot \delta u_k d\Omega + \int_{\Gamma_t} {}^{t+\Delta t}_0 \bar{t}_k \cdot \delta u_k d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} {}^t_0 S_{ij} \cdot \delta {}^t_0 e_{ij} d\Omega. \end{aligned} \quad (41)$$

假设求解域 Ω 内设置 M 个节点 $\mathbf{x}_I (I=1, 2, \dots, M)$, 由改进的移动最小二乘法逼近函数表达 式(17), 对域内任意场节点 $\mathbf{x}$, 参考初始构形, 从时刻 t 到 $t+\Delta t$ 构形的位移增量 ${}_0 u(\mathbf{x})$ 可表示为

$${}_0 u(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \tilde{\Phi}_I(\mathbf{x}) \cdot {}_0 u(\mathbf{x}_I) = \tilde{\Phi}(\mathbf{x}) \cdot {}_0 \mathbf{U}, \quad (42)$$

其中, n 为影响域覆盖场点 $\mathbf{x}$ 的节点数,

$${}_0 \mathbf{U} = ({}_0 u(\mathbf{x}_1), {}_0 u(\mathbf{x}_2), \dots, {}_0 u(\mathbf{x}_n))^T. \quad (43)$$

将式(42)代入式(41)可得:

$$({}_0 \mathbf{K}^{(L0)} + {}_0 \mathbf{K}^{(L1)} + {}_0 \mathbf{K}^{(NL)} + {}_0 \mathbf{G}) \cdot {}_0 \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{F} - {}^t_0 \mathbf{F}, \quad (44)$$

其中,

$${}_0 \mathbf{K}^{(L0)} = \int_{\Omega} {}_0 \mathbf{B}^{(L0)T} \cdot {}_0 \mathbf{D} \cdot {}_0 \mathbf{B}^{(L0)} d\Omega, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} {}_0 \mathbf{K}^{(L1)} &= \int_{\Omega} {}_0 \mathbf{B}^{(L1)T} \cdot {}_0 \mathbf{D} \cdot {}_0 \mathbf{B}^{(L1)} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} {}_0 \mathbf{B}^{(L1)T} \cdot {}_0 \mathbf{D} \cdot {}_0 \mathbf{B}^{(L0)} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} {}_0 \mathbf{B}^{(L1)T} \cdot {}_0 \mathbf{D} \cdot {}_0 \mathbf{B}^{(L1)} d\Omega, \end{aligned} \quad (46)$$

$${}_0 \mathbf{K}^{(NL)} = \int_{\Omega} {}_0 \mathbf{B}^T \cdot {}^t_0 \tilde{\mathbf{S}} \cdot {}_0 \mathbf{B} d\Omega, \quad (47)$$

$${}_0 \mathbf{G} = \alpha \int_{\Gamma_u} \tilde{\Phi}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \tilde{\Phi} d\Gamma, \quad (48)$$

$${}^t\mathbf{F} = \int_{\Omega} {}_0\mathbf{B}^{(L0)\top} \cdot {}^t\mathbf{S} d\Omega + \int_{\Omega} {}_0\mathbf{B}^{(L1)\top} \cdot {}^t\mathbf{S} d\Omega, \quad (49)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = \int_{\Omega} \tilde{\Phi}^\top \cdot {}_0\mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \tilde{\Phi}^\top \cdot {}_0\bar{\mathbf{f}} d\Omega + \tilde{\Phi}^\top \cdot {}_0\mathbf{T} + \alpha \int_{\Gamma_u} \tilde{\Phi}^\top \cdot \mathbf{C} \cdot {}_0\mathbf{u} d\Gamma, \quad (50)$$

$${}_0\mathbf{b} = ({}_0b_1, {}_0b_2)^\top, \quad (51)$$

$${}_0\bar{\mathbf{f}} = ({}_0\bar{f}_1, {}_0\bar{f}_2)^\top, \quad (52)$$

$${}_0\mathbf{T} = ({}_0T_1, {}_0T_2)^\top, \quad (53)$$

$${}_0\mathbf{u} = ({}_0u_1, {}_0u_2)^\top, \quad (54)$$

$${}_0\mathbf{B}^{(L0)} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{1,1} & 0 & \tilde{\Phi}_{2,1} & 0 & \cdots & \tilde{\Phi}_{n,1} & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_{1,2} & 0 & \tilde{\Phi}_{2,2} & \cdots & 0 & \tilde{\Phi}_{n,2} \\ \tilde{\Phi}_{1,2} & \tilde{\Phi}_{1,1} & \tilde{\Phi}_{2,2} & \tilde{\Phi}_{2,1} & \cdots & \tilde{\Phi}_{n,2} & \tilde{\Phi}_{n,1} \end{bmatrix}, \quad (55)$$

$${}_0\mathbf{B}^{(L1)} = \begin{bmatrix} L_{11} \cdot \tilde{\Phi}_{1,1} & L_{21} \cdot \tilde{\Phi}_{1,1} & L_{11} \cdot \tilde{\Phi}_{2,1} \\ L_{12} \cdot \tilde{\Phi}_{1,2} & L_{22} \cdot \tilde{\Phi}_{1,2} & L_{12} \cdot \tilde{\Phi}_{2,2} \\ L_{11} \cdot \tilde{\Phi}_{1,2} + L_{12} \cdot \tilde{\Phi}_{1,1} & L_{21} \cdot \tilde{\Phi}_{1,2} + L_{22} \cdot \tilde{\Phi}_{1,1} & L_{11} \cdot \tilde{\Phi}_{2,2} + L_{12} \cdot \tilde{\Phi}_{2,1} \\ L_{21} \cdot \tilde{\Phi}_{2,1} & \cdots & L_{11} \cdot \tilde{\Phi}_{n,1} & L_{21} \cdot \tilde{\Phi}_{n,1} \\ L_{22} \cdot \tilde{\Phi}_{2,2} & \cdots & L_{12} \cdot \tilde{\Phi}_{n,2} & L_{22} \cdot \tilde{\Phi}_{n,2} \\ L_{21} \cdot \tilde{\Phi}_{2,2} + L_{22} \cdot \tilde{\Phi}_{2,1} & \cdots & L_{11} \cdot \tilde{\Phi}_{n,2} + L_{12} \cdot \tilde{\Phi}_{n,1} & L_{21} \cdot \tilde{\Phi}_{n,2} + L_{22} \cdot \tilde{\Phi}_{n,1} \end{bmatrix}, \quad (56)$$

$$L_{11} = \sum_{k=1}^n \tilde{\Phi}_{k,1} \cdot {}^t u_1(\mathbf{x}_k), \quad (57)$$

$$L_{12} = \sum_{k=1}^n \tilde{\Phi}_{k,2} \cdot {}^t u_1(\mathbf{x}_k), \quad (58)$$

$$L_{21} = \sum_{k=1}^n \tilde{\Phi}_{k,1} \cdot {}^t u_2(\mathbf{x}_k), \quad (59)$$

$$L_{22} = \sum_{k=1}^n \tilde{\Phi}_{k,2} \cdot {}^t u_2(\mathbf{x}_k), \quad (60)$$

$${}_0\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{1,1} & 0 & \tilde{\Phi}_{2,1} & 0 & \cdots & \tilde{\Phi}_{n,1} & 0 \\ \tilde{\Phi}_{1,2} & 0 & \tilde{\Phi}_{2,2} & 0 & \cdots & \tilde{\Phi}_{n,2} & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_{1,1} & 0 & \tilde{\Phi}_{2,1} & \cdots & 0 & \tilde{\Phi}_{n,1} \\ 0 & \tilde{\Phi}_{1,2} & 0 & \tilde{\Phi}_{2,2} & \cdots & 0 & \tilde{\Phi}_{n,2} \end{bmatrix}, \quad (61)$$

$${}^t\tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} {}^tS_{11} & {}^tS_{12} & 0 & 0 \\ {}^tS_{12} & {}^tS_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^tS_{11} & {}^tS_{12} \\ 0 & 0 & {}^tS_{12} & {}^tS_{22} \end{bmatrix}, \quad (62)$$

$${}_0\mathbf{S} = ({}_0S_{11}, {}_0S_{22}, {}_0S_{12})^\top, \quad (63)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}. \quad (64)$$

当 x_1 (或 x_2)方向有位移约束时, 相应的 c_1 (或 c_2)等于1, 否则为0.

令

$${}_0\mathbf{K} = {}_0\mathbf{K}^{(L0)} + {}_0\mathbf{K}^{(L1)} + {}_0\mathbf{K}^{(NL)} + {}_0\mathbf{G}, \quad (65)$$

$${}_0\mathbf{f} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^t\mathbf{F}, \quad (66)$$

则式(44)可简写为

$${}_0\mathbf{K} \cdot {}_0\mathbf{U} = {}_0\mathbf{f}. \quad (67)$$

以上即为弹塑性大变形问题的改进的无单元Galerkin方法. 对于式(44)或式(67), 本文采用Newton-Raphson迭代法进行求解.

4 数值算例

本节采用弹塑性大变形问题的改进的无单元Galerkin方法对3个算例进行了计算, 讨论了权函数、影响域比例参数、罚因子、节点数和迭代步数对计算精度的影响, 并将计算所得的数值解与无单元Galerkin方法和有限元软件ANSYS的解进行了对比, 说明了本文建立的弹塑性大变形问题的改进的无单元Galerkin方法具有提高计算效率的优点.

在算例中, 改进的移动最小二乘法的基函数采用二次多项式. 每个背景积分网格上数值积分采用 4×4 点Gauss积分, 权函数影响域为矩形域, 平衡迭代收敛判断依据采用位移准则.

4.1 受均布荷载作用的双孔矩形板

受均布荷载的单位厚度含两个矩形孔的矩形板, 如图1所示, 板的尺寸为 $0.1\text{ m} \times 0.05\text{ m}$, 矩形孔的尺寸为 $0.02\text{ m} \times 0.01\text{ m}$, 两孔间距为 0.01 m . 材料常数为: 弹性模量 $E=10^{10}\text{ Pa}$, Poisson比 $\nu=0.3$, 屈服极限 $\sigma_s=5.1 \times 10^7\text{ Pa}$. 采用线性强化弹塑性模型, 并服从Mises屈服条件, $E'=0.05E$. 加载至 $u_2=0.02\text{ m}$, 按平面应力问题计算.

采用弹塑性大变形问题的改进的无单元Galerkin方法进行计算, 节点布置如图2所示, 背景积分网格为 20×10 .

考虑不同权函数对本文方法数值解计算精度的影响. 图3给出了分别采用三次、四次和五次样条权函数时本文方法数值解的相对误差. 可以看出, 本文改进的无单元Galerkin方法使用三次样条权函数时计算精度最高, 并且随着节点数的增加相对误差逐渐减小, 显示了本文方法的收敛性.

考虑不同影响域比例参数对本文方法数值解计算精度的影响. 图4给出了不同影响域比例参数时本文方法数值解的相对误差. 可以看出, $d_{\max}=3.6$ 时, 本文方法数值解的相对误差最小.

考虑不同罚因子对本文方法数值解计算精度的影响.

图1 双孔矩形板

Figure 1 A rectangular plate with two holes.

图2 节点分布

Figure 2 Node distribution.

图3 不同权函数下的相对误差

Figure 3 The relative error for different weight functions.

图5给出了 $d_{\max}=3.6$ 时, 本文方法采用不同罚因子得到的数值解的相对误差. 可以看出, 当 $\alpha=10^{20}=10^{10} \times E$ 时, 本文方法数值解的相对误差最小. 本文以下算例取 $d_{\max}=3.6$, $\alpha=10^{10} \times E$.

考虑不同加载步对本文方法数值解计算精度的影响. 图6给出了不同加载步时本文方法数值解的相对误差. 可以看出, 随着加载步的增加相对误差逐渐减小, 显示了本文方法的收敛性. 加载步的增加对计算量影响较大, 算例中选取 $n=10$ 即可得到较为满意的结果.

图7是采用 28×14 个节点, 本文方法计算所得 $x_1=-0.05$ 处节点位移的数值解. 可以看出, 本文改进的无

图4 不同影响域下的相对误差

Figure 4 The relative error for different influence of domain.

图 5 不同罚因子下的相对误差
Figure 5 The relative error for different penalty factors.

图 6 不同加载步下的相对误差
Figure 6 The relative error for different step numbers.

单元 Galerkin 方法的数值解与无单元 Galerkin 方法和有限元软件 ANSYS 的解吻合很好. 无单元 Galerkin 方法计算所需时间为 261.05 s, 而本文改进的无单元 Galerkin 方法计算时间为 196.25 s, 因此, 本文改进的无单元 Galerkin 方法具有较高的计算效率.

4.2 杆的颈缩问题

考虑如图 8 所示的拉伸荷载作用下杆的颈缩问题. 杆的几何尺寸为: $r_0=0.009$ m, $D=0.01$ m, $L=0.05$ m. 材料常数为: 弹性模量 $E=2.1 \times 10^{11}$ Pa, Poisson 比 $\nu=0.3$, 屈服极限 $\sigma_s=2 \times 10^8$ Pa; 采用线性强化弹塑性模型, 并服从 Mises 屈服条件, $E'=0.00114E$. 按平面应力问题计算.

图 7 $x_1=-0.05$ 处位移 u_1 的数值解
Figure 7 The numerical results of u_1 in $x_1=-0.05$.

图 8 杆的颈缩
Figure 8 Necking of a bar.

采用弹塑性大变形问题的改进的无单元 Galerkin 方法进行计算. 由于结构的对称性, 考虑杆的 1/4 区域, 如图 9 所示, 在求解域布置了 213 个节点, 背景积分网格为 14×7 . 影响域比例参数 $d_{\max}=3.6$, 罚因子 $\alpha=10^{10} \times E$, 总加载步为 $n=100$, 加载至杆右端位移 u_1 为 0.0075 m 为止.

图 10 给出了杆的颈缩率与轴向应变的关系, 并与无单元 Galerkin 方法和有限元软件 ANSYS 的解进行了对比. 可以看出, 改进的无单元 Galerkin 方法的解与无单元 Galerkin 方法的解和 ANSYS 的解吻合得很好. 图 11 给出了无单元 Galerkin 方法和改进的无单元 Galerkin 方法得到的杆的变形图, 两种无网格方法的变形图相吻合. 无单元 Galerkin 方法的计算时间为 439.89 s, 而改进的无单元 Galerkin 方法的计算时间为 323.82 s, 进

图 9 节点分布
Figure 9 Node distribution.

图 10 杆的颈缩率和轴向应变的关系

Figure 10 Relationship between the necking ratio of the bar and the axial strain.

一步说明改进的无单元Galerkin方法可提高计算效率.

4.3 受均布荷载的悬臂梁

考虑如图12所示的受均布荷载的单位厚度悬臂梁, 在自由端加载至位移 $u_2 = -2$ m. 梁的几何参数为 $L = 10.0$ m, $D = 1.0$ m. 材料参数为: 弹性模量 $E = 1.2 \times 10^4$ Pa, Poisson比 $\nu = 0.2$, 屈服极限 $\sigma_s = 480$ Pa. 采用线性强化弹塑性模型, 并服从Mises屈服条件, $E' = 0.2E$, 按平面应力问题计算.

采用弹塑性大变形问题的改进的无单元Galerkin方法进行计算, 节点布置如图13所示. 影响域比例参数 $d_{\max} = 3.6$, 罚因子 $\alpha = 10^{10} \times E$. 总加载步为 $n = 50$.

图14为点(10, 0.5)处位移 u_1 随加载步的变化图, 改进的无单元Galerkin方法的解与无单元Galerkin方法和有限元软件ANSYS的解吻合得很好. 图15给出了无单元Galerkin方法和改进的无单元Galerkin方法计算得到的变形图, 两种无网格方法的计算结果相吻合.

对本算例, 无单元Galerkin方法的计算时间为

图 11 杆的变形图

Figure 11 Deformed shape of a bar.

图 12 受均布荷载的悬臂梁

Figure 12 Cantilever beam subjected to distributed load.

图 13 节点分布

Figure 13 Node distribution.

174.01 s, 而改进的无单元Galerkin方法的计算时间为121.81 s. 可见改进的无单元Galerkin方法提高了无单元Galerkin方法的计算效率.

5 结论

基于改进的移动最小二乘法建立了二维弹塑性大变形问题的改进的无单元Galerkin方法. 结合数值算例, 讨论了权函数、影响域比例参数、罚因子、节点数和

图 14 点(10, 0.5)处的位移 u_1 与加载步的关系

Figure 14 Relationship between u_1 and step numbers at the point (10, 0.5).

迭代步数对计算精度的影响, 并与有限元软件ANASYS的计算结果进行了对比, 说明了改进的无单元Galerkin方法求解弹塑性大变形问题的有效性及其优点.

改进的移动最小二乘法的优点是在计算过程中避

图 15 悬臂梁的变形图

Figure 15 Deformed shape of Cantilever beam.

免了方程有时会出现病态或者奇异的问题, 不求矩阵的逆即可直接得到方程组的解. 这样, 相对于无单元Galerkin方法, 改进的无单元Galerkin方法在求解弹塑性大变形问题时明显提高了计算效率.

参考文献

- 1 Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods: An overview and recent developments. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1996, 139: 3–47
- 2 Belytschko T, Krysl P, Krongauz Y. A three-dimensional explicit element-free Galerkin method. *Int J Numer Meth Fluids*, 1997, 24: 1253–1270
- 3 Chen Y P, Eskandarian A, Oskard M, et al. Meshless analysis of high-speed impact. *Theor Appl Fract Mech*, 2005, 44: 201–207
- 4 Rossi R, Alves M K. On the analysis of an EFG method under large deformations and volumetric locking. *Comput Mech*, 2007, 39: 381–399
- 5 Li D M, Liew K M, Cheng Y M. Analyzing elastoplastic large deformation problems with the complex variable element-free Galerkin method. *Comput Mech*, 2014, 53: 1149–1162
- 6 Chen J S, Pan C, Wu C T, et al. Reproducing Kernel Particle Methods for large deformation analysis of non-linear structures. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1996, 139: 195–227
- 7 Chen L, Cheng Y M. The complex variable reproducing kernel particle method for elasto-plasticity problems. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2010, 53: 954–965
- 8 Yao Z H, Zhang Z F, Zhang X. Some application of MLPG in large deformation analysis of Hyperelasto-Plastic material. *Inter Conf Comput Exp Eng Sci*, 2007, 3: 133–138
- 9 Han Z D, Rajendran A M, Atluri S N. Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approaches for solving nonlinear problems with large deformations and rotations. *Comput Model Eng Sci*, 2005, 10: 1–12
- 10 Zhang Z, Liew K M, Cheng Y M, et al. Analyzing 2D fracture problems with the improved element-free Galerkin method. *Eng Anal Bound Elem*, 2008, 32: 241–250
- 11 Zhang Z, Zhao P, Liew K M. Improved element-free Galerkin method for two-dimensional potential problems. *Eng Anal Bound Elem*, 2009, 33: 547–554
- 12 Zhang Z, Zhao P, Liew K M. Analyzing three-dimensional potential problems with the improved element-free Galerkin method. *Comput Mech*, 2009, 44: 273–284

- 13 Zhang Z, Liew K M. Improved Element-Free Galerkin method (IEFG) for solving three-dimensional elasticity problems. *Inter Multisc Mech*, 2010, 3: 123–143
- 14 Zhang Z, Li D M, Cheng Y M, et al. The improved element-free Galerkin method for three-dimensional wave equation. *Acta Mech Sin*, 2012, 28: 808–818
- 15 Zhang Z, Hao S Y, Liew K M, et al. The improved element-free Galerkin method for two-dimensional elastodynamics problems. *Eng Anal Bound Elem*, 2013, 37: 1576–1584
- 16 Zhang Z, Wang J F, Cheng Y M, et al. The improved element-free Galerkin method for three-dimensional transient heat conduction problems. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2013, 56: 1568–1580
- 17 Cheng R J, Liew K M. Analyzing modified equal width (MEW) wave equation using the improved element-free Galerkin method. *Eng Anal Bound Elem*, 2012, 36: 1322–1330
- 18 Cheng R J, Wei Q. Analysis of the generalized Camassa and Holm equation with the improved element-free Galerkin method. *Chin Phys B*, 2013, 22: 060209
- 19 Peng M J, Li R X, Cheng Y M. Analyzing three-dimensional viscoelasticity problems via the improved element-free Galerkin (IEFG) method. *Eng Anal Bound Elem*, 2014, 40: 104–113

The improved element-free Galerkin method for elastoplasticity large deformation problems

CAI XiaoJie¹, PENG MiaoJuan¹ & CHENG YuMin^{2*}

¹Department of Civil Engineering, Shanghai University, Shanghai 200444, China;

²Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China

Based on the improved moving least-squares (IMLS) approximation, the improved element-free Galerkin (IEFG) method for elastoplasticity large deformation problems is presented. Compared with the moving least-squares (MLS) approximation, by orthogonalizing the basis function, the IMLS approximation can overcome the disadvantage of ill-conditional or singular equations in the MLS approximation. Compared with the meshless methods based on the MLS approximation, under the similar computational accuracy, the ones using the IMLS approximation have higher computational efficiency. The IMLS approximation is used to form the approximation function, the Galerkin weak form of elastoplasticity large deformation problem is used to form the discretized equation system, and the penalty method is used to apply the displacement boundary conditions, then the formulae of the improved element-free Galerkin (IEFG) method for elastoplasticity large deformation problems are obtained, and Newton-Raphson method is used to obtain the solution of the final equation system. Some numerical examples are given to discuss the influences of the weight function, the scale parameter, the penalty factor, the node distribution and the load step number on the computational precision of the numerical solutions. Considering the relative errors when the cubic, quartic and quintic spline functions are used as weight functions, it is shown that the numerical solution using the cubic spline function has higher computational precision. About the scale parameter of the influence domain and the penalty factor, the numerical results show that $d_{\max}=3.6$ and $\alpha=10^{10}\times E$ will obtain the solutions with higher precision. The convergence of the method in this paper is analyzed by considering the influence of the node distribution on the computational precision of the solutions, and it is shown that the method in this paper is convergent. And the influence of the total load step number on the computational precision of the solutions is also discussed. Numerical examples show that the method in this paper is effective, and it has the advantage of improving the computational efficiency of the EFG method.

meshless method, improved moving least-squares approximation, improved element-free Galerkin method, elastoplasticity large deformation

PACS: 02.60.Cb, 02.70.-c, 46.15.-x, 46.35.+z

doi: [10.1360/SSPMA2017-00231](https://doi.org/10.1360/SSPMA2017-00231)