非齐度量测度空间上的 Herz 型 Hardy 空间

献给王斯雷教授 85 华诞

韩瑶瑶, 赵凯*

青岛大学数学与统计学院, 青岛 266071

E-mail: hanyaoyao@aliyun.com, zhkzhc@aliyun.com

收稿日期: 2018-04-26; 接受日期: 2018-05-22; 网络出版日期: 2018-10-10; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11471176) 资助项目

摘要 设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是一个同时满足上双倍条件和几何双倍条件的非齐度量测度空间. 本文首先引进了非齐度量测度空间上的 Herz 空间, 并利用中心块得到了该空间的分解定理. 然后, 根据离散系数 $\tilde{K}_{B,S}^{(\rho),p}$, 引入了非齐度量测度空间上的原子 Herz 型 Hardy 空间与分子 Herz 型 Hardy 空间, 并证明了原子 Herz 型 Hardy 空间和分子 Herz 型 Hardy 空间的等价性. 最后作为应用, 本文讨论了 Calderón-Zygmund 算子在这些空间上的有界性.

关键词 非齐度量测度空间 Herz 空间 Hardy 空间 中心块 原子块 分子块 Calderón-Zygmund 算子

MSC (2010) 主题分类 42B30, 42B20, 42B35

1 引言

函数空间理论和奇异积分算子理论在调和分析 and 偏微分方程中起着重要的作用. 自从 Fefferman 和 Stein^[1] 首次引入 Hardy 空间的实变方法以来, 函数空间的研究被广泛关注并取得了丰富的成果 (参见文献 [2–5]), 诸如各种函数空间的包括原子和分子分解在内的刻画以及各类奇异积分算子的有界性问题得到了深入探讨, 如文献 [6–11] 所述.

众所周知, 陆善镇和杨大春等在 20 世纪 90 年代对 Herz 空间和 Herz 型 Hardy 空间进行了深入研究, 其中值得注意的是 Herz 空间的分解利用的是“块”, 它是不具有消失性的, 而不是在 Hardy 空间分解中使用的“原子”或“分子”. 关于 Herz 空间和 Herz 型 Hardy 空间及其上许多奇异积分算子的有界性问题也取得了丰硕的成果, 参见文献 [12–19] 等.

具有双倍条件的度量空间称为齐型空间, 一般地, 双倍条件在经典的调和分析中起着重要的作用. 然而, 近些年, 许多研究结果表明, 在非双倍条件下, $\mathbb{R}^n$ 上许多经典的函数空间理论以及奇异积分算子的有界性依然是成立的, 如文献 [20–27] 等中的结果.

英文引用格式: Han Y Y, Zhao K. Herz type Hardy spaces on non-homogeneous metric measure space (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1315–1338, doi: 10.1360/N012018-00118

2010 年, Hytönen^[28] 引入了满足几何双倍条件和上双倍条件的非齐度量测度空间, 这类空间同时包含了齐型空间和非双倍测度空间. 一些关于非齐度量测度空间的结论以及各种算子在其上的有界性问题, 可参见文献 [29–36] 等. 文献 [37, 38] 通过离散系数 $\tilde{K}_{B,S}^{(\rho),p}$ 引入了非齐度量测度空间上的原子 Hardy 空间 $\tilde{H}_{atb,\rho}^{p,q,\gamma}(\mu)$ 和分子 Hardy 空间 $\tilde{H}_{mb,\rho}^{p,q,\gamma,\epsilon}(\mu)$, 并且证明了 $p = 1$ 时二者的等价性, 即 $\tilde{H}_{atb,\rho}^{1,q,\gamma}(\mu) = \tilde{H}_{mb,\rho}^{1,q,\gamma,\epsilon}(\mu)$; 但当 $0 < p < 1$ 时, $\tilde{H}_{atb,\rho}^{p,q,\gamma}(\mu)$ 是否与 $\tilde{H}_{mb,\rho}^{p,q,\gamma,\epsilon}(\mu)$ 等价目前还是不确定的.

受上述启发, 本文主要研究在非齐度量测度空间上的 Herz 空间和 Herz 型 Hardy 空间, 讨论了它们之间的一些关系, 得到原子 Herz 型 Hardy 空间与分子 Herz 型 Hardy 空间是等价的, 并给出了 Calderón-Zygmund 算子在 Herz 型 Hardy 空间上的几个有界结果.

为方便起见, 第 2 节首先回顾了非齐度量测度空间上的一些重要符号和基础知识, 包括几何双倍条件、上双倍条件、 (α, β) - 倍的球、 η - 弱逆倍条件, 以及离散系数 $\tilde{K}_{B,S}^{(\rho),p}$ 和它的一些性质. 第 3 节基于非齐度量测度空间的几何双倍条件和上双倍条件, 引入了齐次 Herz 空间 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)$ 和中心 (α, q) - 块, 由中心 (α, q) - 块, 得到了齐次 Herz 空间的分解定理. 第 4 节首先引入了原子块和齐次原子 Herz 型 Hardy 空间 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$, 并证明了原子分解定理; 然后引入分子块和齐次分子 Herz 型 Hardy 空间 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$, 也证明了分子分解定理; 最后证明了关系 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu) = \tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu) \subset \dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)$. 作为应用, 第 5 节分别证明了 Calderón-Zygmund 算子 T 在 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)$ 上的有界性, 以及从 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 到 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)$ 的有界性 (同样从 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$ 到 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)$ 的有界性), 从 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 到 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,(\delta-v\alpha)/2}(\mu)$ 的有界性. 第 6 节指出, 在非齐度量测度空间上, 这些结论同样适用于非齐次的 Herz 空间 $K_q^{\alpha,p}(\mu)$ 、Herz 型 Hardy 空间 $\tilde{H}K_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 和 $\tilde{H}K_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$.

在本文中, C 表示只依赖于主要参数的常数, 在不同处可取不同的值. χ_E 表示的是 $\mathcal{X}$ 上子集 E 的特征函数. 对于任意的球 B , c_B 表示球 B 的中心, r_B 表示球 B 的半径.

2 预备知识

为了方便, 本节回顾非齐度量测度空间上的一些基础知识.

以下是几何双倍条件, 它最初是由 Coifman 和 Weiss^[39] 引入的, 它在文献 [40] 中被称为度量双倍条件.

定义 2.1 若存在某个正整数 $N_0 \in \mathbb{N}$, 使得对任意的球 $B(x, r) \subset \mathcal{X}$, 其中 $x \in \mathcal{X}$, $r \in (0, \infty)$, 都存在至多 N_0 个球 $B(x_i, r/2)_i$ 构成 $B(x, r)$ 的一个覆盖, 则称度量空间 $(\mathcal{X}, d)$ 是几何双倍的.

引理 2.2^[28] 若 $(\mathcal{X}, d)$ 是一个度量空间, 则以下叙述是等价的:

- (i) $(\mathcal{X}, d)$ 是几何双倍的.
- (ii) 对于任意的 $\epsilon \in (0, 1)$ 和任意的球 $B(x, r) \subset \mathcal{X}$, 其中 $x \in \mathcal{X}$, $r \in (0, \infty)$, 存在 $B(x, r)$ 的一个有限的球覆盖 $\{B(x_i, \epsilon r)\}_i$, 覆盖的基数为 $N_0 \epsilon^{-n_0}$, $n_0 := \log_2 N_0$, 这里和以后的 N_0 为定义 2.1 中所述.
- (iii) 对于任意的 $\epsilon \in (0, 1)$ 和任意的球 $B(x, r) \subset \mathcal{X}$, 其中 $x \in \mathcal{X}$, $r \in (0, \infty)$, $B(x, r)$ 包含在至多 $N_0 \epsilon^{-n_0}$ 个互不相交的球 $\{B(x_i, \epsilon r)\}_i$ 中.
- (iv) 对于任意的球 $B(x, r) \subset \mathcal{X}$, 其中 $x \in \mathcal{X}$, $r \in (0, \infty)$, 存在 $M \in \mathbb{N}$, 使得 $B(x, r)$ 包含在至多 M 个互不相交的球 $\{B(x_i, r/4)\}_{i=1}^M$ 中.

下面是上双倍条件的定义.

定义 2.3^[28] 如果 μ 是 $\mathcal{X}$ 上的 Borel 测度, 并存在一个控制函数 $\lambda: \mathcal{X} \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, 使得对每一个 $x \in \mathcal{X}$, $\lambda(x, r)$ 关于 r 都单调不减, 且存在一个依赖于 λ 的正常数 C_λ , 使得对任意的 $x \in \mathcal{X}$

和 $r \in (0, \infty)$, 有

$$\mu(B(x, r)) \leq \lambda(x, r) \leq C_{(\lambda)} \lambda\left(x, \frac{r}{2}\right), \quad (2.1)$$

则称度量测度空间 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是上双倍的.

若度量测度空间 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 既满足几何双倍条件又满足上双倍条件, 则称其为非齐度量测度空间.

注 2.4 显然, 对于任意的 $x \in \mathcal{X}$ 和 $r \in (0, \infty)$, 如果令控制函数 $\lambda(x, r) := \mu(B(x, r))$, 则齐型空间是上双倍的; 对于 D 维 Euclid 空间及任意的 Radon 测度 μ (其中 $\mu(B(x, r)) \leq C_0 r^n$, $n \in (0, D]$), 若令 $\lambda(x, r) := C_0 r^n$, 其中 $x \in \mathbb{R}^D$, $r \in (0, \infty)$, 则 $(\mathbb{R}^D, \mu)$ 也是上双倍的.

引理 2.5^[38] 若 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是上双倍的, λ 是 $\mathcal{X} \times (0, \infty)$ 上的控制函数, 则存在另一个控制函数 $\tilde{\lambda}$, 使得 $\tilde{\lambda} \leq \lambda$, $C_{(\tilde{\lambda})} \leq C_{(\lambda)}$, 并且对于所有的 $x, y \in \mathcal{X}$, 若 $d(x, y) \leq r$, 就有

$$\tilde{\lambda}(x, r) \leq C_{(\tilde{\lambda})} \tilde{\lambda}(y, r). \quad (2.2)$$

引理 2.6^[41] 上双倍条件等价于弱增长条件: 存在 r 的非减控制函数 $\lambda(x, r) : \mathcal{X} \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, 以及只依赖于 λ 的正常数 $C_{(\lambda)}$ 和 $\epsilon > 0$, 使得

(i) 对于所有的 $r \in (0, \infty)$, $t \in [0, r]$, $x, y \in \mathcal{X}$ 和 $d(x, y) \in (0, r)$, 有

$$|\lambda(y, r+t) - \lambda(x, r)| \leq C_{(\lambda)} \left[\frac{d(x, y) + t}{r} \right]^\epsilon \lambda(x, r);$$

(ii) 对于所有的 $x \in \mathcal{X}$ 和 $r \in (0, \infty)$, 有 $\mu(B(x, r)) \leq \lambda(x, r)$.

从现在开始, 总假设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是一个非齐度量测度空间, 其中控制函数 λ 满足 (2.2).

Hytönen^[28] 证明了, 若 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 满足几何双倍条件和上双倍条件, 则存在一些球具有以下 (α, β) -倍性质.

定义 2.7^[28] 令 $\alpha, \beta > 1$, 若 $\mu(\alpha B) \leq \beta \mu(B)$, 则球 $B \subset \mathcal{X}$ 被称为是一个 (α, β) -倍球, 其中对于所有的球 $B := B(c_B, r_B)$ 和 $\rho \in (0, \infty)$, 有 $\rho B := B(c_B, \rho r_B)$.

Hytönen^[28] 证明了, 若 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是一个满足上双倍条件的度量测度空间, $\alpha, \beta > 1$ 并且 $\beta > C_\lambda^{\log_\alpha 2} =: \alpha^v$, 则对于任意的球 $B \subset \mathcal{X}$, 存在一个正整数 j 使得 $\alpha^j B$ 是 (α, β) -倍的. 进一步, 如果令 $(\mathcal{X}, d)$ 是几何双倍的, $\beta > \alpha^n$, 其中 $n := \log_2 n_0$, μ 是 $\mathcal{X}$ 上一个有界集的有限 Borel 测度, 则对于 μ -几乎处处的 $x \in \mathcal{X}$, 存在任意小的 (α, β) -倍的球, 这些球的中心为 x , 半径为 $\alpha^j r$, 其中 $j \in \mathbb{Z}_+$, r 为 $(0, \infty)$ 上预先指定的数.

定义 2.8^[28] 设 $\eta > 0$, 若对所有的 $r \in (0, 2\text{diam}(\mathcal{X}))$ 和 $a \in (0, 2\text{diam}(\mathcal{X})/r)$, 存在一个只依赖于 a 和 $\mathcal{X}$ 的常数 $C(a) > 1$, 使得对于所有的 $x \in \mathcal{X}$, 有 $\lambda(x, ar) \geq C(a)\lambda(x, r)$, 并且

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[C(a^k)]^\eta} < \infty, \quad (2.3)$$

则称控制函数 λ 满足 η -弱逆倍条件.

容易验证, 若 $\eta_1 < \eta_2$, λ 满足 η_1 -弱逆倍条件, 则 λ 也满足 η_2 -弱逆倍条件.

在非齐度量测度空间 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 中, 离散系数 $\tilde{K}_{B,S}^{(\rho),p}$ 是一个很有用的概念, 下面回顾它的定义.

定义 2.9^[28] 对于任意两个球 $B \subset S \subset \mathcal{X}$, $\rho > 1, p \in (0, 1]$, 定义

$$\tilde{K}_{B,S}^{(\rho),p} := \left\{ 1 + \sum_{k=-\lfloor \log_\rho 2 \rfloor}^{N_{B,S}^{(\rho)}} \left[\frac{\mu(\rho^k B)}{\lambda(c_B, \rho^k r_B)} \right]^p \right\}^{1/p}, \quad (2.4)$$

其中 $N_{B,S}^{(\rho)}$ 是满足 $\rho^{N_{B,S}^{(\rho)}} r_B \geq r_S$ 的最小正整数, $[\log_\rho 2]$ 表示不大于 $\log_\rho 2$ 的最大整数.

注 2.10 文献 [37] 指出

$$\tilde{K}_{B,S}^{(\rho),p} \sim \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{N_{B,S}^{(\rho)} + [\log_\rho 2] + 1} \left[\frac{\mu(\rho^k B)}{\lambda(c_B, \rho^k r_B)} \right]^p \right\}^{1/p},$$

其中这一等价关系所含的正常数不依赖于球 $B \subset S \subset \mathcal{X}$, 只与 ρ 和 p 有关.

下面的引理是离散系数 $\tilde{K}_{B,S}^{(\rho),p}$ 的一些重要的性质.

引理 2.11 [37] 假设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是一个非齐度量测度空间, $p \in (0, 1]$.

(i) 对于任意的 $\rho > 1$, 存在一个常数 $C_{(\rho)} > 0$, 使得对于所有的球 $B \subset R \subset S$, 有 $[\tilde{K}_{B,R}^{(\rho),p}]^p \leq C_{(\rho)} [\tilde{K}_{B,S}^{(\rho),p}]^p$;

(ii) 对于任意的 $\alpha \geq 1, \rho > 1$, 存在一个常数 $C_{(\alpha, \rho)} > 0$, 使得对于所有的球 $B \subset S$, 其中 $r_S \leq \alpha r_B$, 有 $[\tilde{K}_{B,S}^{(\rho),p}]^p \leq C_{(\alpha, \rho)}$;

(iii) 对于任意的 $\rho > 1$, 存在一个常数 $C_{(\rho, p, v)} > 0$, 使得对于所有的球 B , 有 $[\tilde{K}_{B, \tilde{B}^\rho}^{(\rho),p}]^p \leq C_{(\rho, p, v)}$; 如果 $\alpha, \beta > 1$, 球 $B \subset S$ 且中心相同, 并且不存在 (α, β) - 倍的球 $\alpha^k B, k \in \mathbb{N}$, 使得 $B \subset \alpha^k B \subset S$, 则存在一个常数 $C_{(\alpha, \beta, \rho, v)} > 0$, 使得 $[\tilde{K}_{B,S}^{(\alpha),p}]^p \leq C_{(\alpha, \beta, \rho, v)}$;

(iv) 对于任意的 $\rho > 1$, 存在一个常数 $c_{(\rho, p, v)} > 0$, 使得对于所有的球 $B \subset R \subset S$, 有

$$[\tilde{K}_{B,S}^{(\rho),p}]^p \leq [\tilde{K}_{B,R}^{(\rho),p}]^p + c_{(\rho, p, v)} [\tilde{K}_{R,S}^{(\rho),p}]^p; \quad (2.5)$$

(v) 对于任意的 $\rho > 1$, 存在常数 $\tilde{c}_{(\rho, p, v)} > 0$, 使得对于球 $B \subset R \subset S$, 有 $[\tilde{K}_{R,S}^{(\rho),p}]^p \leq \tilde{c}_{(\rho, p, v)} [\tilde{K}_{B,S}^{(\rho),p}]^p$;

(vi) 对于任意的 $\rho_1, \rho_2 > 1$, 存在常数 $c_{(\rho_1, \rho_2, p, v)} > 0$ 和 $C_{(\rho_1, \rho_2, p, v)} > 0$, 使得对于所有的球 $B \subset S$, 有

$$c_{(\rho_1, \rho_2, p, v)} \tilde{K}_{B,S}^{(\rho_2),p} \leq \tilde{K}_{B,S}^{(\rho_1),p} \leq C_{(\rho_1, \rho_2, p, v)} \tilde{K}_{B,S}^{(\rho_2),p}. \quad (2.6)$$

3 Herz 空间 $\dot{K}_q^{\alpha, p}(\mu)$

本节首先介绍了非齐度量测度空间 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 上的齐次 Herz 空间 $\dot{K}_q^{\alpha, p}(\mu)$ 和中心 (α, q) - 块. 然后给出了 $\dot{K}_q^{\alpha, p}(\mu)$ 的分解定理. 全文假设 x_0 是空间 $\mathcal{X}$ 中的固定一点. 令 $B_k = \{x \in \mathcal{X} : d(x_0, x) < 2^k\}$, $C_k = B_k \setminus B_{k-1}$, $\chi_k = \chi_{C_k}, k \in \mathbb{Z}$.

下面是非齐度量测度空间上的齐次 Herz 空间的定义.

定义 3.1 令 $-\infty < \alpha < \infty, 0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$. 设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是一个非齐度量测度空间, 则非齐度量测度空间上的齐次 Herz 空间 $\dot{K}_q^{\alpha, p}(\mu)$ 定义为

$$\dot{K}_q^{\alpha, p}(\mu) = \{f \in L_{\text{loc}}^q(\mathcal{X} \setminus \{0\}) : \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha, p}(\mu)} < \infty\}, \quad (3.1)$$

其中

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha, p}(\mu)} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^k)]^{\alpha p} \|f \chi_k\|_{L^q(\mu)}^p \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (3.2)$$

为了证明非齐度量测度空间上齐次 Herz 空间的分解定理, 接下来引入中心 (α, q) - 块.

定义 3.2 令 $0 < \alpha < \infty$, $1 \leq q < \infty$, 则 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 上的函数 $b(x)$ 被称为中心 (α, q) - 块, 若 $b(x)$ 满足以下条件:

- (i) $\text{supp } b \subset B(x_0, r)$, $r > 0$, 其中 $B(x_0, r) = \{x \in \mathcal{X} : d(x_0, x) < r\}$;
- (ii) $\|b\|_{L^q(\mu)} \leq [\lambda(x_0, r)]^{-\alpha}$.

若 $r = 2^k$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$, 则中心 (α, q) - 块称为是二进的.

下面的定理是非齐度量测度空间上齐次 Herz 空间的分解定理, 也是本节的主要结果.

定理 3.3 令 $0 < \alpha < \infty$, $0 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$. 设 λ 满足 η - 逆倍条件, $\eta \in (0, \min\{\frac{\alpha p}{2}, \frac{\alpha p}{2(p-1)}\})$, 则 $f \in \dot{K}_q^{\alpha, p}(\mu)$, 当且仅当

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k b_k(x), \quad (3.3)$$

其中 $b_k(x)$ 是中心 (α, q) - 块, $\text{supp}(b_k) \subset B_k$, 并且 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p < \infty$. 进一步,

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha, p}(\mu)} \sim \inf \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (3.4)$$

这里的下确界取遍所有 f 的上述分解.

证明 必要性. 对于任意的 $f \in \dot{K}_q^{\alpha, p}(\mu)$, 记

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x) \chi_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^k)]^\alpha \|f \chi_k\|_{L^q(\mu)} \frac{f(x) \chi_k(x)}{[\lambda(x_0, 2^k)]^\alpha \|f \chi_k\|_{L^q(\mu)}} =: \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k b_k(x),$$

其中

$$\lambda_k := [\lambda(x_0, 2^k)]^\alpha \|f \chi_k\|_{L^q(\mu)}, \quad b_k(x) := \frac{f(x) \chi_k(x)}{[\lambda(x_0, 2^k)]^\alpha \|f \chi_k\|_{L^q(\mu)}}.$$

显然, $\text{supp}(b_k) \subset B_k$, $\|b_k\|_{L^q(\mu)} = [\lambda(x_0, 2^k)]^{-\alpha}$, 且

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^k)]^{\alpha p} \|f \chi_k\|_{L^q(\mu)}^p = \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha, p}(\mu)}^p < \infty.$$

充分性. 设 $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k b_k(x)$, 其中每个 $b_k(x)$ 都是中心 (α, q) - 块, $\text{supp}(b_k) \subset B_k$,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p < \infty.$$

下面证明 $f \in \dot{K}_q^{\alpha, p}(\mu)$. 注意到

$$\|f \chi_j\|_{L^q(\mu)} = \left\| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k b_k \chi_j \right\|_{L^q(\mu)} \leq \sum_{k \geq j} |\lambda_k| \|b_k\|_{L^q(\mu)}, \quad (3.5)$$

分为以下两种情形进行讨论.

(i) 当 $0 < p \leq 1$ 时, 由 (3.5)、 $b_k(x)$ 的大小条件和 η - 弱逆倍条件可得

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha, p}(\mu)} = \left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^j)]^{\alpha p} \|f \chi_j\|_{L^q(\mu)}^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^j)]^{\alpha p} \sum_{k \geq j} |\lambda_k|^p \|b_k\|_{L^q(\mu)}^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^j)]^{\alpha p} \sum_{k \geq j} |\lambda_k|^p [\lambda(x_0, 2^k)]^{-\alpha p} \right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \sum_{j=-\infty}^k \left[\frac{\lambda(x_0, 2^j)}{\lambda(x_0, 2^k)} \right]^{\alpha p} \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

(ii) 当 $1 < p < \infty$ 时, 由 (3.5)、 $b_k(x)$ 的大小条件、Hölder 不等式和 η -弱逆倍条件可知,

$$\begin{aligned} \|f\chi_j\|_{L^q(\mu)} &\leq \sum_{k \geq j} |\lambda_k| \|b_k\|_{L^q(\mu)} \leq \sum_{k \geq j} |\lambda_k| [\lambda(x_0, 2^k)]^{-\alpha} \\ &\leq \left\{ \sum_{k \geq j} |\lambda_k|^p [\lambda(x_0, 2^k)]^{-\frac{\alpha p}{2}} \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{k \geq j} [\lambda(x_0, 2^k)]^{-\frac{\alpha p'}{2}} \right\}^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left\{ \sum_{k \geq j} |\lambda_k|^p [\lambda(x_0, 2^k)]^{-\frac{\alpha p}{2}} \right\}^{\frac{1}{p}} [\lambda(x_0, 2^j)]^{-\frac{\alpha}{2}} \left\{ \sum_{k \geq j} \left[\frac{\lambda(x_0, 2^j)}{\lambda(x_0, 2^k)} \right]^{\frac{\alpha p'}{2}} \right\}^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C \left\{ \sum_{k \geq j} |\lambda_k|^p [\lambda(x_0, 2^k)]^{-\frac{\alpha p}{2}} \right\}^{\frac{1}{p}} [\lambda(x_0, 2^j)]^{-\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

由 η -弱逆倍条件, 进一步得到

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)} &\leq \left\{ C \sum_{j=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^j)]^{\alpha p} \sum_{k \geq j} |\lambda_k|^p [\lambda(x_0, 2^k)]^{-\frac{\alpha p}{2}} [\lambda(x_0, 2^j)]^{-\frac{\alpha p}{2}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \sum_{j=-\infty}^k \left[\frac{\lambda(x_0, 2^j)}{\lambda(x_0, 2^k)} \right]^{\frac{\alpha p}{2}} \right\}^{\frac{1}{p}} \leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

因此, 综合以上两种情形, 有

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)} \leq C \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

充分性得证. 定理 3.3 得证. $\square$

4 Herz 型 Hardy 空间 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,p,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 和 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$

本节首先介绍非齐度量测度空间上的原子 Herz 型 Hardy 空间 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 和分子 Herz 型 Hardy 空间 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$. 然后讨论 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 、 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$ 和 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)$ 三者之间的关系.

4.1 原子 Herz 型 Hardy 空间 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$

本小节引进非齐度量测度空间上 $(\alpha, p, q, \gamma, \rho)_\lambda$ -原子块和原子 Herz 型 Hardy 空间 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 的概念, 得到对于任意的 $f \in \tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 都存在一个原子块分解.

在此之前, 首先回顾拟 Banach 空间.

定义 4.1 ^[42] (i) 若一个向量空间 $\mathcal{B}$ 含有一个非负的、非退化的 (即 $\|f\|_{\mathcal{B}} = 0$ 当且仅当 $f = 0$)、齐次的并且满足拟三角不等式的拟模 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$, 则 $\mathcal{B}$ 称为拟 Banach 空间. 拟三角不等式指存在一个常

数 $K \in [1, \infty)$, 使得对于所有的 $f, g \in \mathcal{B}$, 有

$$\|f + g\|_{\mathcal{B}} \leq K(\|f\|_{\mathcal{B}} + \|g\|_{\mathcal{B}}).$$

(ii) 设 $0 < r \leq 1$, 对于所有的 $f, g \in \mathcal{B}_r$, 若 $\|f + g\|_{\mathcal{B}_r} \leq K(\|f\|_{\mathcal{B}_r} + \|g\|_{\mathcal{B}_r})$, 则具有拟模 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_r}$ 的拟 Banach 空间 $\mathcal{B}_r$ 称为 r -拟 Banach 空间. 此后, 总把 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_r}$ 称为 r -拟 Banach 空间 $\mathcal{B}_r$ 的 r -拟模.

下面看 $(\alpha, p, q, \gamma, \rho)_\lambda$ -原子块和 $\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)$ 的定义.

定义 4.2 假设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是一个非齐度量测度空间, 令 $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p \neq q$, $\alpha \in (0, \infty)$, $\rho \in (1, \infty)$, $\gamma \in [1, \infty)$. 若 $L^2(\mu)$ 上的函数 b 满足以下条件:

- (i) 存在一个球 B 使得 $\text{supp } b \subset B = B(x_0, r)$, $r > 0$;
- (ii) $\int_{\mathcal{X}} b(x) d\mu(x) = 0$;
- (iii) 对于任意的 $j = 1, 2$, 存在一个支在球 $B_j \subset B$ 上的函数和一个常数 $\lambda_j \in \mathbb{C}$, 使得 $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$,

$$\|a_j\|_{L^q(\mu)} \leq [\lambda(x_0, r_B)]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_j, B}^{(\rho), p}]^{-\gamma}, \quad (4.1)$$

则称 b 是一个 $(\alpha, p, q, \gamma, \rho)_\lambda$ -原子块. 令 $|b|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)} = |\lambda_1| + |\lambda_2|$.

若 $r = 2^k$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$, 则 $(\alpha, p, q, \gamma, \rho)_\lambda$ -原子块称为是二进的.

如果存在一个 $(\alpha, p, q, \gamma, \rho)_\lambda$ -原子块序列 $\{b_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, 使得在 $L^2(\mu)$ 中 $f = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i$, 且

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |b_i|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)}^p < \infty,$$

则称 f 是属于 $\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)$ 的. 定义

$$\|f\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)} := \inf \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |b_i|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)}^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

这里的下确界取遍所有 f 的分解.

原子 Herz 型 Hardy 空间 $\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)$ 定义为在 p -拟模 $\|\cdot\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)}^p$ 下 $\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)$ 的完备化. 由引理 2.11 关于离散系数 $\tilde{K}_{B, S}^{(\rho), p}$ 的性质易知, $\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)$ 与 ρ 的取值无关, 其中 $\rho \in (1, \infty)$.

下面说明 $\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)$ 与 γ 的取值无关, 其中 $\gamma \in [1, \infty)$. 对任意的 $1 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \infty$, 显然 $\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma_2}(\mu) \subset \tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma_1}(\mu)$. 再看反过来的包含 $\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma_1}(\mu) \subset \tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma_2}(\mu)$. 事实上, 我们只需对于任意的 $(\alpha, p, q, \gamma_1, \rho)_\lambda$ -原子块 b , 证明 b 是一个 $(\alpha, p, q, \gamma_2, \rho)_\lambda$ -原子块.

设 b 是一个 $(\alpha, p, q, \gamma_1, \rho)_\lambda$ -原子块, 由定义知 $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$, 其中 $\text{supp } (a_j) \subset B_j \subset B$, $j = 1, 2$, 并且

$$\|a_j\|_{L^q(\mu)} \leq [\lambda(x_0, r_B)]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_j, B}^{(\rho), p}]^{-\gamma_1}.$$

由于 $B_j \subset B \subset 2B$, 运用引理 2.11(vi) 和 2.11(i), 可得 $\tilde{K}_{B, 2B}^{(\rho), p} \geq C \tilde{K}_{B_j, B}^{(\rho), p}$.

再运用引理 2.11(ii), 注意到 $\tilde{K}_{B_j, B}^{(\rho), p} > 1$, 可得

$$\begin{aligned} \|a_j\|_{L^q(\mu)} &\leq [\lambda(x_0, r_B)]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_j, B}^{(\rho), p}]^{-\gamma_1} \\ &\leq C [\lambda(x_0, r_B)]^{-\alpha} \leq C [\lambda(x_0, r_B)]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B, 2B}^{(\rho), p}]^{-\gamma_2} \end{aligned}$$

$$\leq C[\lambda(x_0, r_B)]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_j, B}^{(\rho), p}]^{-\gamma_2}.$$

所以, 易知 b 是一个 $(\alpha, p, q, \gamma_2, \rho)_\lambda$ - 原子块.

根据 $(\alpha, p, q, \gamma, \rho)_\lambda$ - 原子块, 下面证明原子齐次 Herz 型 Hardy 空间在非齐度量测度空间上的分解定理.

定理 4.3 设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是一个非齐度量测度空间, $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p \neq q$. 令 $\alpha \in (0, \infty)$, $\rho \in (1, \infty)$, $\gamma \in [1, \infty)$, 则 $f \in \tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)$ 当且仅当存在 $(\alpha, p, q, \gamma, \rho)_\lambda$ - 原子块列 $\{b_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, 使得

$$f = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i, \quad (4.2)$$

且 $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |b_i|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)}^p < \infty$. 进一步有

$$\|f\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)}^p = \inf \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |b_i|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)}^p \right\}, \quad (4.3)$$

这里的下确界取遍 (4.2) 中 f 的所有分解.

证明 必要性. 设 $f \in \tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)$, 若 (4.2) 成立, 则易得

$$\|f\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)}^p \leq \inf \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |b_i|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)}^p \right\}. \quad (4.4)$$

因此只需证 (4.2) 和 (4.4) 的反向不等式成立. 下面分两种情形进行讨论.

(i) 若 $f \in \tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)$, 则由定义 4.2 知, 存在一个 $(\alpha, p, q, \gamma, \rho)_\lambda$ - 原子块序列 $\{b_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, 使得在 $L^2(\mu)$ 中 $f = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i$, 且

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |b_i|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)}^p < \infty.$$

事实上, 对于任意的 $M \in \mathbb{N}$, $f - \sum_{i=-M}^M b_i = \sum_{i=-\infty}^{-M-1} b_i + \sum_{i=M+1}^{+\infty} b_i$. 因此,

$$\left\| f - \sum_{i=-M}^M b_i \right\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)}^p \leq \sum_{i=-\infty}^{-M-1} |b_i|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)}^p + \sum_{i=M+1}^{+\infty} |b_i|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)}^p \rightarrow 0, \quad \text{当 } M \rightarrow \infty \text{ 时},$$

于是 (4.2) 成立, 且 (4.4) 的反向不等式成立.

(ii) 若 $f \in \tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu) \setminus \tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)$, 则由 $\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}$ 是 $\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)$ 的完备化知, 存在一个 Cauchy 序列 $\{f_k\}_{k=1}^{+\infty}$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)}^p = 0.$$

因此,

$$\|f - f_k\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)}^p \leq 2^{-k-2} \|f\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)}^p. \quad (4.5)$$

则在 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 中, $f = \sum_{k=1}^{\infty}(f_k - f_{k-1})$, 其中 $f_0 = 0$. 另一方面, 对于任意的 $k \in \mathbb{N}$ 和 $f_k - f_{k-1} \in \tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$, 由定义 4.2 和情形 (i) 可以推出, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在一个 $(\alpha, p, q, \gamma, \rho)_\lambda$ - 原子块列 $\{b_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, 使得在 $L^2(\mu)$ 和 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 中有 $f_k - f_{k-1} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i$, 且

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |b_i|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)}^p < \|f_k - f_{k-1}\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)}^p + \frac{\epsilon}{2^k}. \quad (4.6)$$

又由 $f = \sum_{k=1}^{\infty}(f_k - f_{k-1})$, 进一步得到

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}(f_k - f_{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_{k,i}.$$

因此, 结合 (4.6) 和 (4.5), 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |b_{k,i}|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)}^p &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k - f_{k-1}\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)}^p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} [\|f_k - f\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)}^p + \|f_{k-1} - f\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)}^p] + \epsilon \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \|f\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)}^p + \epsilon = \|f\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)}^p + \epsilon. \end{aligned}$$

注意到 ϵ 的任意性, 完成了情形 (ii) 的证明. 必要性得证.

充分性. 令 $f = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i \in \tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$, 且

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |b_i|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)}^p < \infty,$$

则对于每一个 $k \in \mathbb{N}$, $f_k = \sum_{i=-\infty}^k b_i \in \tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 且在 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 中 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$. 因此, $f \in \tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$. 定理得证. $\square$

4.2 分子 Herz 型 Hardy 空间 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$

本小节引入非齐度量测度空间上 $(\alpha, p, q, \gamma, \epsilon, \rho)_\lambda$ - 分子块和分子 Herz 型 Hardy 空间 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$, 并证明对于任意的 $f \in \tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$ 存在一个分子块分解.

定义 4.4 假设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是一个非齐度量测度空间, $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p \neq q$, 令 $\alpha \in (0, \infty)$, $\rho \in (1, \infty)$, $\gamma \in [1, \infty)$, $\epsilon \in (0, \infty)$, 则若 $L^2(\mu)$ 上的函数 b 满足以下条件:

(i) $\int_{\mathcal{X}} b(x) d\mu(x) = 0$.

(ii) 存在一些球 $B := B(x_0, r_B)$ (其中 $r_B > 0$) 和常数 $\widetilde{M}, M \in \mathbb{N}$ 使得对于所有的 $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, M_k\}$, 当 $k = 0$ 时, $M_0 := \widetilde{M}$, 当 $k > 0$ 时, $M_k := M$; 存在支在球 $B_{k,j} \subset U_k(B)$ 上的函数 $m_{k,j}$, 当 $k = 0$ 时, $U_0(B) := \rho^2 B$, 当 $k > 0$ 时, $U_k(B) := \rho^{k+2} B \setminus \rho^{k-2} B$ 以及 $\lambda_{k,j} \in \mathbb{C}$ 使得在 $L^2(\mu)$ 中 $b = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{M_k} \lambda_{k,j} m_{k,j}$, 且有

$$\|m_{k,j}\|_{L^q(\mu)} \leq \rho^{-k\epsilon} [\lambda(x_0, \rho^{k+2} r_B)]^{-\alpha} [\widetilde{K}_{B_{k,j}, \rho^{k+2} B}^{(\rho), p}]^{-\gamma}, \quad (4.7)$$

$$|b|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)}^p = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{M_k} |\lambda_{k,j}|^p < \infty,$$

则称 b 是一个 $(\alpha, p, q, \gamma, \epsilon, \rho)_{\lambda^-}$ 分子块.

若 $r_B = 2^k$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$, 则 $(\alpha, p, q, \gamma, \epsilon, \rho)_{\lambda^-}$ 分子块称为是二进的.

若存在一个 $(\alpha, p, q, \gamma, \epsilon, \rho)_{\lambda^-}$ 分子块序列 $\{b_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, 使得在 $L^2(\mu)$ 中有 $f = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i$, 且

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |b_i|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)}^p < \infty,$$

则函数 f 称为属于 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$. 定义

$$\|f\|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)} := \inf \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |b_i|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)}^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

这里的下确界取遍 f 的所有分解.

分子 Herz 型 Hardy 空间 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$ 定义为在 p -拟模 $\|\cdot\|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)}^p$ 下 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$ 的完化.

根据 $(\alpha, p, q, \gamma, \epsilon, \rho)_{\lambda^-}$ 分子块, 我们得到以下 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$ 的分解定理.

定理 4.5 设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是一个非齐度量测度空间, $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p \neq q$, 令 $\alpha \in (0, \infty)$, $\rho \in (1, \infty)$, $\gamma \in [1, \infty)$, $\epsilon \in (0, \infty)$, 则 $f \in \tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$ 当且仅当存在一个 $(\alpha, p, q, \gamma, \epsilon, \rho)_{\lambda^-}$ 分子块序列 $\{b_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, 使得在 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$ 中,

$$f = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i, \quad (4.8)$$

且 $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |b_i|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)}^p < \infty$. 进一步,

$$\|f\|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)}^p = \inf \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |b_i|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)}^p \right\}, \quad (4.9)$$

其中下确界取遍 (4.8) 中 f 所有的分解.

定理 4.5 的证明与定理 4.3 的证明类似. 所以略去具体步骤.

4.3 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$ 、 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 和 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)$ 的关系

下面讨论 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$ 、 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 和 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)$ 三者之间的关系, 得到

$$\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu) = \tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu) \subset \dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu).$$

定理 4.6 设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是一个非齐度量测度空间, $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p \neq q$, 令 $\alpha \in (0, \infty)$, $\rho \in (1, \infty)$, $\gamma \in [1, \infty)$, $\epsilon \in (0, \infty)$, 则 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu) = \tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$.

证明 首先, 证明 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu) \subset \tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$. 显然, 若能够证明对于任意的 $(\alpha, p, q, \gamma, \rho)_{\lambda^-}$ 原子块 b , b 是一个 $(\alpha, p, q, \gamma, \epsilon, \rho)_{\lambda^-}$ 分子块, 且

$$|b|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)}^p \leq C |b|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)}^p,$$

则结论成立.

事实上, 对于任意的 $(\alpha, p, q, \gamma, \rho)_{\lambda^-}$ 原子块 b , 由定义 4.2 知, $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 =: A_1 + A_2$, 其中 $\text{supp}(a_j) \subset B_j \subset B$, $j = 1, 2$, 且

$$\|a_j\|_{L^q(\mu)} \leq [\lambda(x_0, r_B)]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_j, B}^{(\rho), p}]^{-\gamma}.$$

又由 (4.1)、(2.1) 和引理 2.11, 可得

$$\|A_1\|_{L^q(\mu)} \leq |\lambda_1| \|a_1\|_{L^q(\mu)} \leq |\lambda_1| [\lambda(x_0, r_B)]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_1, B}^{(\rho), p}]^{-\gamma} \leq c_1 |\lambda_1| [\lambda(x_0, \rho^2 r_B)]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_1, \rho^2 B}^{(\rho), p}]^{-\gamma}.$$

令 $l_1 = c_1 |\lambda_1|$, $m_1 = \lambda_1 a_1 / l_1$, 则 $A_1 = l_1 m_1$, $\text{supp}(m_1) \subset B_1 \subset \rho^2 B$, 且

$$\|m_1\|_{L^q(\mu)} \leq [\lambda(x_0, \rho^2 r_B)]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_1, \rho^2 B}^{(\rho), p}]^{-\gamma}.$$

同理, 对于 A_2 , 有

$$\|A_2\|_{L^q(\mu)} \leq c_2 |\lambda_2| [\lambda(x_0, \rho^2 r_B)]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_2, \rho^2 B}^{(\rho), p}]^{-\gamma}.$$

令 $l_2 = c_2 |\lambda_2|$, $m_2 = \lambda_2 a_2 / l_2$, 则 $A_2 = l_2 m_2$, $\text{supp}(m_2) \subset B_2 \subset \rho^2 B$, 且

$$\|m_2\|_{L^q(\mu)} \leq [\lambda(x_0, \rho^2 r_B)]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_2, \rho^2 B}^{(\rho), p}]^{-\gamma}.$$

因此, $b = l_1 m_1 + l_2 m_2$ 是一个 $(\alpha, p, q, \gamma, \epsilon, \rho)_{\lambda^-}$ 分子块, 且

$$|b|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma, \epsilon}(\mu)}^p = \sum_{j=1}^2 |l_j|^p \leq C \sum_{j=1}^2 |\lambda_j|^p \leq C |b|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)}^p.$$

下面证明 $\tilde{H}\dot{K}_{mb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma, \epsilon}(\mu) \subset \tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)$. 事实上, 只要证明, 对于任意的 $(\alpha, p, q, \gamma, \epsilon, \rho)_{\lambda^-}$ 分子块 b , $b \in \tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)$, 且

$$\|b\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma}(\mu)}^p \leq C |b|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb, q, \rho}^{\alpha, p, \gamma, \epsilon}(\mu)}^p$$

就足够了. 设 b 是一个 $(\alpha, p, q, \gamma, \epsilon, \rho)_{\lambda^-}$ 分子块, 由定义 4.4 知,

$$b = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{M_k} \lambda_{k,j} m_{k,j} =: \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad (4.10)$$

对于任意的 $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, M_k\}$, $\lambda_{k,j} \in \mathbb{C}$, 且 $\text{supp}(m_{k,j}) \subset B_{k,j} \subset U_k(B)$. 令 $B_{k+2}^\rho := \rho^{k+2} B$, $k \in \mathbb{Z}_+$. 由 (4.10), 进一步得到

$$\begin{aligned} b &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[b_k - \frac{\chi_{B_{k+2}^\rho}}{\mu(B_{k+2}^\rho)} \int_{\mathcal{X}} b_k(y) d\mu(y) \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi_{B_{k+2}^\rho}}{\mu(B_{k+2}^\rho)} \int_{\mathcal{X}} b_k(y) d\mu(y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{M_k} \lambda_{k,j} \left[m_{k,j} - \frac{\chi_{B_{k+2}^\rho}}{\mu(B_{k+2}^\rho)} \int_{\mathcal{X}} m_{k,j}(y) d\mu(y) \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi_{B_{k+2}^\rho}}{\mu(B_{k+2}^\rho)} \int_{\mathcal{X}} b_k(y) d\mu(y) \\ &=: \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{M_k} b_{k,j} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k P_k =: A_3 + A_4, \end{aligned}$$

其中

$$b_{k,j} := \lambda_{k,j} \left[m_{k,j} - \frac{\chi_{B_{k+2}^\rho}}{\mu(B_{k+2}^\rho)} \int_{\mathcal{X}} m_{k,j}(y) d\mu(y) \right],$$

$$\phi_k := \frac{\chi_{B_{k+2}^\rho}}{\mu(B_{k+2}^\rho)} \quad \text{和} \quad P_k := \int_{\mathcal{X}} b_k(y) d\mu(y).$$

对于 A_3 , 证明对于任意的 $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, M_k\}$, $b_{k,j}$ 是一个 $(\alpha, p, q, \gamma, \rho)$ λ -原子块. 注意到 $\text{supp}(b_{k,j}) \subset B_{k+2}^\rho$, $\int_{\mathcal{X}} b_{k,j}(y) d\mu(y) = 0$, 只需证明 $b_{k,j}$ 满足定义 4.2 的大小条件. 下面继续将 $b_{k,j}$ 分解为两个部分进行讨论:

$$\begin{aligned} b_{k,j} &= \lambda_{k,j} \left[m_{k,j} - \frac{\chi_{B_{k,j}}}{\mu(B_{k+2}^\rho)} \int_{\mathcal{X}} m_{k,j}(y) d\mu(y) \right] + (-\lambda_{k,j}) \frac{\chi_{B_{k+2}^\rho \setminus B_{k,j}}}{\mu(B_{k+2}^\rho)} \int_{\mathcal{X}} m_{k,j}(y) d\mu(y) \\ &=: A_{k,j}^{(3,1)} + A_{k,j}^{(3,2)}. \end{aligned}$$

由 Hölder 不等式和 (4.7), 得

$$\begin{aligned} \|A_{k,j}^{(3,1)}\|_{L^q(\mu)} &\leq |\lambda_{k,j}| \left\{ \|m_{k,j}\|_{L^q(\mu)} + \frac{[\mu(B_{k,j})]^{\frac{1}{q}}}{\mu(B_{k+2}^\rho)} \left| \int_{\mathcal{X}} m_{k,j}(y) d\mu(y) \right| \right\} \\ &\leq |\lambda_{k,j}| \left\{ \|m_{k,j}\|_{L^q(\mu)} + \frac{[\mu(B_{k,j})]^{\frac{1}{q}}}{\mu(B_{k+2}^\rho)} [\mu(B_{k,j})]^{\frac{1}{q'}} \|m_{k,j}\|_{L^q(\mu)} \right\} \\ &\leq C |\lambda_{k,j}| \|m_{k,j}\|_{L^q(\mu)} \leq c_3 |\lambda_{k,j}| \rho^{-k\epsilon} [\lambda(x_0, r_{B_{k+2}^\rho})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_{k,j}, B_{k+2}^\rho}^{(\rho), p}]^{-\gamma}, \end{aligned}$$

其中 c_3 是不依赖于 k 和 j 的正常数. 令 $\mu_{k,j}^{(1)} := c_3 |\lambda_{k,j}| \rho^{-k\epsilon}$, $a_{k,j}^{(1)} := [\mu_{k,j}^{(1)}]^{-1} A_{k,j}^{(3,1)}$, 则 $A_{k,j}^{(3,1)} = \mu_{k,j}^{(1)} a_{k,j}^{(1)}$, $\text{supp}(a_{k,j}^{(1)}) \subset B_{k,j} \subset B_{k+2}^\rho$, 且

$$\|a_{k,j}^{(1)}\|_{L^q(\mu)} \leq [\lambda(x_0, r_{B_{k+2}^\rho})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_{k,j}, B_{k+2}^\rho}^{(\rho), p}]^{-\gamma}.$$

对于 $A_{k,j}^{(3,2)}$, 由 Hölder 不等式、(4.7) 和引理 2.11, 有 $\tilde{K}_{B_{k,j}, B_{k+2}^\rho}^{(\rho), p} \geq 1$ 和 $B_{k,j} \subset B_{k+2}^\rho$, 可得

$$\begin{aligned} \|A_{k,j}^{(3,2)}\|_{L^q(\mu)} &\leq |\lambda_{k,j}| \frac{[\mu(B_{k+2}^\rho \setminus B_{k,j})]^{\frac{1}{q}}}{\mu(B_{k+2}^\rho)} \left| \int_{\mathcal{X}} m_{k,j}(y) d\mu(y) \right| \\ &\leq |\lambda_{k,j}| \frac{[\mu(B_{k+2}^\rho)]^{\frac{1}{q}}}{\mu(B_{k+2}^\rho)} [\mu(B_{k,j})]^{\frac{1}{q'}} \|m_{k,j}\|_{L^q(\mu)} \\ &\leq C |\lambda_{k,j}| [\mu(B_{k+2}^\rho)]^{\frac{1}{q}-1} [\mu(B_{k+2}^\rho)]^{\frac{1}{q'}} \rho^{-k\epsilon} [\lambda(x_0, r_{B_{k+2}^\rho})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_{k,j}, B_{k+2}^\rho}^{(\rho), p}]^{-\gamma} \\ &\leq C |\lambda_{k,j}| \rho^{-k\epsilon} [\lambda(x_0, r_{B_{k+2}^\rho})]^{-\alpha} \\ &\leq c_4 |\lambda_{k,j}| \rho^{-k\epsilon} [\lambda(x_0, r_{B_{k+2}^\rho})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_{k+2}^\rho, B_{k+2}^\rho}^{(\rho), p}]^{-\gamma}, \end{aligned}$$

其中 c_4 是不依赖于 k 和 j 的正常数. 令 $\mu_{k,j}^{(2)} := c_4 |\lambda_{k,j}| \rho^{-k\epsilon}$, $a_{k,j}^{(2)} := [\mu_{k,j}^{(2)}]^{-1} A_{k,j}^{(3,2)}$, 则 $A_{k,j}^{(3,2)} = \mu_{k,j}^{(2)} a_{k,j}^{(2)}$, $\text{supp}(a_{k,j}^{(2)}) \subset B_{k+2}^\rho$, 且

$$\|a_{k,j}^{(2)}\|_{L^q(\mu)} \leq [\lambda(x_0, r_{B_{k+2}^\rho})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_{k+2}^\rho, B_{k+2}^\rho}^{(\rho), p}]^{-\gamma}.$$

因此, $b_{k,j} = \mu_{k,j}^{(1)} a_{k,j}^{(1)} + \mu_{k,j}^{(2)} a_{k,j}^{(2)}$ 是一个 $(\alpha, p, q, \gamma, \rho)$ λ -原子块, $|b_{k,j}|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)} \leq C |\lambda_{k,j}| \rho^{-k\epsilon}$, 且

$$\|A_3\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)} \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{M_k} |\lambda_{k,j}| \rho^{-k\epsilon} \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{M_k} |\lambda_{k,j}| \leq C \|b_{k,j}\|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)}.$$

为了估计 A_4 , 令 $Q_k := \sum_{i=k}^{\infty} P_i$. 由 $\int_{\mathcal{X}} b(y) d\mu(y) = 0$, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k P_k &= \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k (Q_k - Q_{k+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\phi_{k+1} - \phi_k) Q_{k+1} + \phi_0 Q_0 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\phi_{k+1} - \phi_k) Q_{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=k+1}^{\infty} \sum_{j=1}^M \lambda_{i,j} (\phi_{k+1} - \phi_k) \int_{B_{i,j}} m_{i,j}(y) d\mu(y) \\ &=: \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=k+1}^{\infty} \sum_{j=1}^M b_{k,j,i}, \end{aligned}$$

则对于任意的 $k \in \mathbb{Z}_+$, $i \in \{k+1, k+2, \dots\}$ 和 $j \in \{1, \dots, M\}$, 我们证明 $b_{k,j,i}$ 是一个 $(\alpha, p, q, \gamma, \rho)_{\lambda}$ -原子块. 观察到 $\text{supp}(b_{k,j,i}) \subset B_{k+3}^{\rho}$, $\int_{\mathcal{X}} b_{k,j,i}(y) d\mu(y) = 0$, 只需要证明 $b_{k,j,i}$ 满足 $(\alpha, p, q, \gamma, \rho)_{\lambda}$ -原子块的大小条件. 进一步分解 $b_{k,j,i}$,

$$b_{k,j,i} = \lambda_{i,j} \phi_{k+1} \int_{B_{i,j}} m_{i,j}(y) d\mu(y) + (-\lambda_{i,j}) \phi_k \int_{B_{i,j}} m_{i,j}(y) d\mu(y) =: A_{k,j,i}^{(4,1)} + A_{k,j,i}^{(4,2)}.$$

由 Hölder 不等式、(4.7)、引理 2.11 和 $B_{i,j} \subset B_{k+2}^{\rho}$ ($i \geq k$), 以及 $\tilde{K}_{B_{i,j}, B_{k+2}^{\rho}}^{(\rho), p} \geq 1$, 可得

$$\begin{aligned} \|A_{k,j,i}^{(4,1)}\|_{L^q(\mu)} &\leq |\lambda_{i,j}| \frac{[\mu(B_{k+3}^{\rho})]^{\frac{1}{q}}}{\mu(B_{k+3}^{\rho})} \left| \int_{B_{i,j}} m_{i,j}(y) d\mu(y) \right| \leq |\lambda_{i,j}| \frac{[\mu(B_{k+3}^{\rho})]^{\frac{1}{q}}}{\mu(B_{k+3}^{\rho})} [\mu(B_{i,j})]^{\frac{1}{q'}} \|m_{i,j}\|_{L^q(\mu)} \\ &\leq |\lambda_{i,j}| [\mu(B_{k+3}^{\rho})]^{\frac{1}{q}-1} [\mu(B_{k+3}^{\rho})]^{\frac{1}{q'}} \rho^{-i\epsilon} [\lambda(x_0, r_{B_{k+2}^{\rho}})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_{i,j}, B_{k+2}^{\rho}}^{(\rho), p}]^{-\gamma} \\ &\leq C |\lambda_{i,j}| \rho^{-i\epsilon} [\lambda(x_0, r_{B_{k+2}^{\rho}})]^{-\alpha} \leq C \rho^{-i\epsilon} |\lambda_{i,j}| [\lambda(x_0, r_{B_{k+3}^{\rho}})]^{-\alpha} \\ &\leq c_5 \rho^{-i\epsilon} |\lambda_{i,j}| [\lambda(x_0, r_{B_{k+3}^{\rho}})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_{k+3}^{\rho}, B_{k+3}^{\rho}}^{(\rho), p}]^{-\gamma}, \end{aligned}$$

其中 c_5 是不依赖于 k, j 和 i 的正常数. 令

$$\mu_{k,j,i}^{(1)} := c_5 |\lambda_{i,j}| \rho^{-i\epsilon}, \quad a_{k,j,i}^{(1)} := [\mu_{k,j,i}^{(1)}]^{-1} A_{k,j,i}^{(4,1)},$$

则 $A_{k,j,i}^{(4,1)} = \mu_{k,j,i}^{(1)} a_{k,j,i}^{(1)}$, $\text{supp}(a_{k,j,i}^{(1)}) \subset B_{k+3}^{\rho}$, 且

$$\|a_{k,j,i}^{(1)}\|_{L^q(\mu)} \leq [\lambda(x_0, r_{B_{k+3}^{\rho}})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_{k+3}^{\rho}, B_{k+3}^{\rho}}^{(\rho), p}]^{-\gamma}.$$

同理, 易得

$$\|A_{k,j,i}^{(4,2)}\|_{L^q(\mu)} \leq c_6 \rho^{-i\epsilon} |\lambda_{i,j}| [\lambda(x_0, r_{B_{k+3}^{\rho}})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_{k+2}^{\rho}, B_{k+3}^{\rho}}^{(\rho), p}]^{-\gamma},$$

其中 c_6 是不依赖于 k, j 和 i 的正常数. 令

$$\mu_{k,j,i}^{(2)} := c_6 |\lambda_{i,j}| \rho^{-i\epsilon}, \quad a_{k,j,i}^{(2)} := [\mu_{k,j,i}^{(2)}]^{-1} A_{k,j,i}^{(4,2)},$$

则 $A_{k,j,i}^{(4,2)} = \mu_{k,j,i}^{(2)} a_{k,j,i}^{(2)}$, $\text{supp}(a_{k,j,i}^{(2)}) \subset B_{k+2}^{\rho} \subset B_{k+3}^{\rho}$, 且

$$\|a_{k,j,i}^{(2)}\|_{L^q(\mu)} \leq [\lambda(x_0, r_{B_{k+3}^{\rho}})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_{k+2}^{\rho}, B_{k+3}^{\rho}}^{(\rho), p}]^{-\gamma}.$$

因此, $b_{k,j,i} = \mu_{k,j,i}^{(1)} a_{k,j,i}^{(1)} + \mu_{k,j,i}^{(2)} a_{k,j,i}^{(2)}$ 是一个 $(\alpha, p, q, \gamma, \rho)_{\lambda}$ -原子块, 且

$$|b_{k,j,i}|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)} \leq C |\lambda_{i,j}| \rho^{-i\epsilon}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \|A_4\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)} &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=k+1}^{\infty} \sum_{j=1}^M |b_{k,j,i}|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)} \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=k+1}^{\infty} \sum_{j=1}^M |\lambda_{i,j}| \rho^{-i\epsilon} \\ &\leq C \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^M |\lambda_{i,j}| i \rho^{-i\epsilon} \leq C |b|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)}. \end{aligned}$$

综合 A_3 和 A_4 的估计, 得到 $b \in \tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$, 且

$$\|b\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)}^p \leq C |b|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)}^p.$$

这意味着 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu) \subset \tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$, 并对于任意的 $f \in \tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$, 有

$$\|f\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)} \leq C \|f\|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)}.$$

定理证毕. $\square$

注 4.7 由于分子 Herz 型 Hardy 空间 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$ 与原子 Herz 型 Hardy 空间 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 是等价的, 而原子 Herz 型 Hardy 空间已经指出是与 ρ 和 γ 无关的, 所以, 在不是特别需要的情形下, 可以分别简记为 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q}^{\alpha,p,\epsilon}(\mu)$ 和 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q}^{\alpha,p}(\mu)$.

定理 4.8 令 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是一个非齐度量测度空间, $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p \neq q$, 假设 $\alpha \in (0, \infty)$, $\rho \in (1, \infty)$, $\gamma \in [1, \infty)$, $\epsilon \in (0, \infty)$. 若 λ 满足 η -弱逆倍条件, $\eta \in (0, \alpha p)$, 则 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu) \subset \dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)$, 且存在一个正常数 C , 使得对于所有的 $f \in \tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$, 有

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)}^p \leq C \|f\|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)}^p.$$

证明 不失一般性, 假设 $\rho = 2$. 对于任意的 $f \in \tilde{H}\dot{K}_{mb,q,2}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$, 由定理 4.5, 有

$$f = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{M_k} \lambda_{i,k,j} m_{i,k,j},$$

其中 b_i 是一个 $(\alpha, p, q, \gamma, \epsilon, \rho)_\lambda$ -分子块, $\text{supp}(m_{i,k,j}) \subset B_{i,k,j} \subset U_k(B_i)$, 这里 $U_0(B_i) = 2^2 B_i$, 当 $k > 0$ 时, $U_k(B_i) = 2^{k+2} B_i \setminus 2^{k-2} B_i$, 且

$$\|m_{i,k,j}\|_{L^q(\mu)} \leq 2^{-k\epsilon} [\lambda(x_0, 2^{k+2} r_{B_i})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_{i,k,j}, 2^{k+2} B_i}^{(2),p}]^{-\gamma}. \quad (4.11)$$

进一步有

$$f = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{M_k} \lambda_{i,k,j} 2^{-k\epsilon} [\tilde{K}_{B_{i,k,j}, 2^{k+2} B_i}^{(2),p}]^{-\gamma} \frac{m_{i,k,j}}{2^{-k\epsilon} [\tilde{K}_{B_{i,k,j}, 2^{k+2} B_i}^{(2),p}]^{-\gamma}} =: \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{M_k} l_{i,k,j} a_{i,k,j},$$

其中

$$l_{i,k,j} := \lambda_{i,k,j} 2^{-k\epsilon} [\tilde{K}_{B_{i,k,j}, 2^{k+2} B_i}^{(2),p}]^{-\gamma}, \quad a_{i,k,j} := \frac{m_{i,k,j}}{2^{-k\epsilon} [\tilde{K}_{B_{i,k,j}, 2^{k+2} B_i}^{(2),p}]^{-\gamma}}.$$

显然, $\text{supp}(a_{i,k,j}) \subset B_{i,k,j}$. 又由 (4.11) 和 $B_{i,k,j} \subset 2^{k+2} B_i$, 可得

$$\|a_{i,k,j}\|_{L^q(\mu)} = \left\| \frac{m_{i,k,j}}{2^{-k\epsilon} [\tilde{K}_{B_{i,k,j}, 2^{k+2} B_i}^{(2),p}]^{-\gamma}} \right\|_{L^q(\mu)} \leq \frac{2^{-k\epsilon} [\lambda(x_0, 2^{k+2} r_{B_i})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_{i,k,j}, 2^{k+2} B_i}^{(\rho),p}]^{-\gamma}}{2^{-k\epsilon} [\tilde{K}_{B_{i,k,j}, 2^{k+2} B_i}^{(2),p}]^{-\gamma}}$$

$$= [\lambda(x_0, 2^{k+2}r_{B_i})]^{-\alpha} \leq [\lambda(x_0, r_{B_{i,k,j}})]^{-\alpha}.$$

另一方面, 由于 $\chi_m = \chi_{C_m}$, $C_m = B_m \setminus B_{m-1}$ 和 $\text{supp}(a_{i,k,j}) \subset B_{i,k,j} \subset 2^{k+2}B_i$, 可推出

$$\|f\chi_m\|_{L^q(\mu)} = \left\| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{M_k} l_{i,k,j} a_{i,k,j} \chi_m \right\|_{L^q(\mu)} \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k \geq m-i-2} \sum_{j=1}^{M_k} |l_{i,k,j}| \|a_{i,k,j}\|_{L^q(\mu)}. \quad (4.12)$$

因此, 结合 (3.2)、(4.12) 和 η -弱逆倍条件, 有

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)}^p &\leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^m)]^{\alpha p} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k \geq m-i-2} \sum_{j=1}^{M_k} |l_{i,k,j}|^p \|a_{i,k,j}\|_{L^q(\mu)}^p \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^m)]^{\alpha p} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k \geq m-i-2} \sum_{j=1}^{M_k} |\lambda_{i,k,j} 2^{-k\epsilon} [\tilde{K}_{B_{i,k,j}, 2^{k+2}B_i}^{(2),p}]^{-\gamma}|^p [\lambda(x_0, 2^{k+2}r_{B_i})]^{-\alpha p} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{M_k} \sum_{m=-\infty}^{i+k+2} \left[\frac{\lambda(x_0, 2^m)}{\lambda(x_0, 2^{k+2+i})} \right]^{\alpha p} |\lambda_{i,k,j} 2^{-k\epsilon} [\tilde{K}_{B_{i,k,j}, 2^{k+2}B_i}^{(2),p}]^{-\gamma}|^p \\ &\leq C \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{M_k} |\lambda_{i,k,j} 2^{-k\epsilon} [\tilde{K}_{B_{i,k,j}, 2^{k+2}B_i}^{(2),p}]^{-\gamma}|^p = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{M_k} |l_{i,k,j}|^p. \end{aligned}$$

根据 $\tilde{K}_{B_{i,k,j}, 2^{k+2}B_i}^{(2),p} \geq 1$, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{M_k} |l_{i,k,j}|^p &\leq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{M_k} |\lambda_{i,j,k} 2^{-k\epsilon} [\tilde{K}_{B_{i,k,j}, 2^{k+2}B_i}^{(2),p}]^{-\gamma}|^p \\ &\leq C \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{M_k} |\lambda_{i,j,k}|^p \leq C \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |b_i|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,2}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)}^p. \end{aligned}$$

因此, 由定理 3.3 知, $f \in \dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)$, 且

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)}^p \leq C \|f\|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,2}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)}^p.$$

定理 4.8 证毕. $\square$

注 4.9 令 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是一个非齐度量测度空间, 假设 $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p \neq q$, $\alpha \in (0, \infty)$, $\rho \in (1, \infty)$, 且 $\gamma \in [1, \infty)$. 若 λ 满足 η -弱逆倍条件, $\eta \in (0, \alpha p)$, 由定理 4.6 知, $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu) = \tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$, 又由定理 4.8 知, $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu) \subset \dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)$. 因此, $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu) \subset \dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)$, 且存在一个正常数 C , 使得对于任意的 $f \in \tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$, 有

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)}^p \leq C \|f\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)}^p.$$

5 Calderón-Zygmund 算子的有界性

作为应用, 本节讨论 Calderón-Zygmund 算子在非齐度量测度空间上的 Herz 空间和 Herz 型 Hardy 空间上的有界性.

首先回顾在非齐度量测度空间上的 Calderón-Zygmund 算子的概念.

定义 5.1 ^[43] 如果存在一个正常数 $C_{(K)}$, 使得

(i) 对于任意的 $x, y \in \mathcal{X}$, $x \neq y$, 有

$$|K(x, y)| \leq C_{(K)} \frac{1}{\lambda(x, d(x, y))}; \quad (5.1)$$

(ii) 存在正常数 $0 < \delta \leq 1$ 和 $c_{(K)}$, 使得对于任意的 $x, \tilde{x}, y \in \mathcal{X}$, $d(x, y) \geq c_{(K)}d(x, \tilde{x})$, 有

$$|K(x, y) - K(\tilde{x}, y)| + |K(y, x) - K(y, \tilde{x})| \leq C_{(K)} \frac{[d(x, \tilde{x})]^\delta}{[d(x, y)]^\delta \lambda(x, d(x, y))}, \quad (5.2)$$

则称函数 $K \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{X} \times \mathcal{X} \setminus \{(x, x) : x \in \mathcal{X}\})$ 为非齐度量测度空间上的 Calderón-Zygmund 算子核.

若一个线性算子 T 的核 K 满足 (5.1) 和 (5.2), 对于所有的 $f \in L^\infty_b(\mu) := \{f \in L^\infty(\mu) : f \text{ 的支集有界}\}$, 有

$$Tf(x) := \int_{\mathcal{X}} K(x, y)f(y) d\mu(y), \quad x \notin \text{supp}(f), \quad (5.3)$$

则称 T 是非齐度量测度空间上的一个 Calderón-Zygmund 算子.

一些关于非齐度量测度空间上 Calderón-Zygmund 算子的有界性问题可参见文献 [43, 44] 等.

下面是证明 Calderón-Zygmund 算子有界性问题的一个重要引理.

引理 5.2 ^[45] 假设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是一个非齐度量测度空间, 令 T 是一个 Calderón-Zygmund 算子, 则以下几种情形是等价的:

- (i) T 在 $L^2(\mu)$ 上是有界的;
- (ii) 对于 $q > 1$, T 在 $L^q(\mu)$ 上是有界的;
- (iii) T 是 $L^1(\mu)$ 到弱 $-L^1(\mu)$ 有界的.

定理 5.3 令 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 为一个非齐度量测度空间. 假设 $0 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{q}$, 并且 λ 满足 η -弱逆倍条件, $\eta \in (0, \min\{\frac{\alpha p}{2}, \frac{\alpha p'}{2}, \frac{(1-1/q-\alpha)p}{2}, \frac{(1-1/q-\alpha)p'}{2}\})$. 令 T 为非齐度量测度空间上的一个 Calderón-Zygmund 算子, 若 T 在 $L^2(\mu)$ 上有界, 则 T 在 $\dot{K}^{\alpha, p}_q(\mu)$ 上有界.

证明 对于任意的 $f \in \dot{K}^{\alpha, p}_q(\mu)$, 由定理 3.3 可知, $f(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \lambda_j b_j(x)$, 其中每个 b_j 都是中心 (α, q) -块, $\text{supp}(b_j) \subset B_j$, 且

$$\|f\|_{\dot{K}^{\alpha, p}_q(\mu)} \sim \inf \left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

进一步分解

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{\dot{K}^{\alpha, p}_q(\mu)}^p &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^l)]^{\alpha p} \|(Tf)\chi_l\|_{L^q(\mu)}^p \\ &\leq \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^l)]^{\alpha p} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j| \|(Tb_j)\chi_l\|_{L^q(\mu)} \right\}^p \\ &\leq \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^l)]^{\alpha p} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{l-2} |\lambda_j| \|(Tb_j)\chi_l\|_{L^q(\mu)} \right\}^p \\ &\quad + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^l)]^{\alpha p} \left\{ \sum_{j=l-1}^{\infty} |\lambda_j| \|(Tb_j)\chi_l\|_{L^q(\mu)} \right\}^p \end{aligned}$$

$$=: I_1 + I_2.$$

对于 I_2 , 分为以下两种情形进行讨论.

(i₁) 当 $0 < p \leq 1$ 时, 由引理 5.2、(2.1) 和 η -弱逆倍条件, 有

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^l)]^{\alpha p} \sum_{j=l-1}^{\infty} |\lambda_j|^p \|b_j\|_{L^q(\mu)}^p \leq C \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^l)]^{\alpha p} \sum_{j=l-1}^{\infty} |\lambda_j|^p [\lambda(x_0, 2^j)]^{-\alpha p} \\ &= C \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^p \sum_{l=-\infty}^{j+1} \left[\frac{\lambda(x_0, 2^l)}{\lambda(x_0, 2^j)} \right]^{\alpha p} = C \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^p \left\{ \sum_{l=-\infty}^j \left[\frac{\lambda(x_0, 2^l)}{\lambda(x_0, 2^j)} \right]^{\alpha p} + \left\{ \frac{\lambda(x_0, 2^{j+1})}{\lambda(x_0, 2^j)} \right\}^{\alpha p} \right\} \\ &\leq C \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^p. \end{aligned}$$

(i₂) 当 $1 < p < \infty$ 时, 由引理 5.2、(2.1)、Hölder 不等式和 η -弱逆倍条件, 可得

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^l)]^{\alpha p} \left\{ \sum_{j=l-1}^{\infty} |\lambda_j| \|b_j\|_{L^q(\mu)} \right\}^p \\ &\leq C \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^l)]^{\alpha p} \left\{ \sum_{j=l-1}^{\infty} |\lambda_j|^p [\lambda(x_0, 2^j)]^{-\frac{\alpha p}{2}} \right\} \left\{ \sum_{j=l-1}^{\infty} [\lambda(x_0, 2^j)]^{-\frac{\alpha p'}{2}} \right\}^{\frac{p}{p'}} \\ &= C \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^l)]^{\alpha p} \left\{ \sum_{j=l-1}^{\infty} |\lambda_j|^p [\lambda(x_0, 2^j)]^{-\frac{\alpha p}{2}} \right\} [\lambda(x_0, 2^l)]^{-\frac{\alpha p}{2}} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{j=l}^{\infty} \left[\frac{\lambda(x_0, 2^l)}{\lambda(x_0, 2^j)} \right]^{\frac{\alpha p'}{2}} + \left[\frac{\lambda(x_0, 2^l)}{\lambda(x_0, 2^{l-1})} \right]^{\frac{\alpha p'}{2}} \right\}^{\frac{p}{p'}} \\ &\leq C \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=l-1}^{\infty} |\lambda_j|^p \left[\frac{\lambda(x_0, 2^l)}{\lambda(x_0, 2^j)} \right]^{\frac{\alpha p}{2}} \leq C \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^p. \end{aligned}$$

对于 I_1 , 注意到 $j \leq l-2$, $x \in C_l$, $y \in B_j$, 则 $x \in \mathcal{X} \setminus 2B_j$, 这意味着 $\lambda(x, d(x, y)) \sim \lambda(x_0, d(x, x_0))$. 因此, 由 (5.1)、Hölder 不等式和定义 3.2 知,

$$\begin{aligned} \|(Tb_j)\chi_l\|_{L^q(\mu)} &= \left\{ \int_{C_l} |(Tb_j)\chi_l|^q d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \left\{ \int_{C_l} \left| \int_{B_j} \frac{|b_j(y)|}{\lambda(x, d(x, y))} d\mu(y) \right|^q d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left\{ \int_{C_l} \frac{1}{[\lambda(x_0, d(x, x_0))]^q} \left| \int_{B_j} |b_j(y)| d\mu(y) \right|^q d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C \left\{ \int_{C_l} \frac{1}{[\lambda(x_0, d(x, x_0))]^q} d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{q}} \int_{B_j} |b_j(y)| d\mu(y) \\ &\leq C \frac{[\mu(B_l)]^{1/q}}{\lambda(x_0, 2^l)} \|b_j(y)\|_{L^q(\mu)} [\mu(B_j)]^{\frac{1}{q'}} \leq C \frac{[\mu(B_l)]^{1/q}}{\lambda(x_0, 2^l)} [\lambda(x_0, 2^j)]^{-\alpha} [\mu(B_j)]^{\frac{1}{q'}}. \end{aligned}$$

再分为两种情形进行讨论.

(ii₁) 当 $0 < p \leq 1$ 时, 由 (2.1) 和 η -弱逆倍条件, 有

$$I_1 \leq C \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^l)]^{\alpha p} \sum_{j=-\infty}^{l-2} |\lambda_j|^p \frac{\mu(B_l)^{\frac{p}{q}}}{[\lambda(x_0, 2^l)]^p} [\lambda(x_0, 2^j)]^{-\alpha p} [\mu(B_j)]^{\frac{p}{q'}}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^l)]^{\alpha p} \sum_{j=-\infty}^{l-2} |\lambda_j|^p [\lambda(x_0, 2^j)]^{-\alpha p} \left[\frac{\lambda(x_0, 2^j)}{\lambda(x_0, 2^l)} \right]^{(1-\frac{1}{q})p} \\
 &= C \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{l-2} |\lambda_j|^p \left[\frac{\lambda(x_0, 2^j)}{\lambda(x_0, 2^l)} \right]^{(1-\frac{1}{q}-\alpha)p} \\
 &= C \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^p \sum_{l=j+2}^{+\infty} \left[\frac{\lambda(x_0, 2^j)}{\lambda(x_0, 2^l)} \right]^{(1-\frac{1}{q}-\alpha)p} \leq C \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^p.
 \end{aligned}$$

(ii₂) 当 $1 < p < \infty$ 时, 同样由 (2.1)、Hölder 不等式和 η -弱逆倍条件可得

$$\begin{aligned}
 I_1 &\leq C \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^l)]^{\alpha p} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{l-2} |\lambda_j| \frac{[\mu(B_l)]^{\frac{1}{q}}}{\lambda(x_0, 2^l)} [\lambda(x_0, 2^j)]^{-\alpha} [\mu(B_j)]^{\frac{1}{q'}} \right\}^p \\
 &\leq C \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{l-2} \left[\frac{\lambda(x_0, 2^j)}{\lambda(x_0, 2^l)} \right]^{-\alpha} |\lambda_j| \frac{[\lambda(x_0, 2^l)]^{\frac{1}{q}} [\lambda(x_0, 2^j)]^{1-\frac{1}{q}}}{\lambda(x_0, 2^l)} \right\}^p \\
 &= C \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{l-2} |\lambda_j| \left[\frac{\lambda(x_0, 2^j)}{\lambda(x_0, 2^l)} \right]^{(1-\frac{1}{q}-\alpha)} \right\}^p \\
 &\leq C \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{l-2} |\lambda_j|^p \left[\frac{\lambda(x_0, 2^j)}{\lambda(x_0, 2^l)} \right]^{(1-\frac{1}{q}-\alpha)\frac{p}{2}} \right\} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{l-2} \left[\frac{\lambda(x_0, 2^j)}{\lambda(x_0, 2^l)} \right]^{(1-\frac{1}{q}-\alpha)\frac{p'}{2}} \right\}^{\frac{p}{p'}} \\
 &= C \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{l-2} |\lambda_j|^p \left[\frac{\lambda(x_0, 2^l)}{\lambda(x_0, 2^j)} \right]^{(1-\frac{1}{q}-\alpha)\frac{p}{2}} \leq C \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^p.
 \end{aligned}$$

因此,

$$\|Tf\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)}^p \leq C \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^p \leq C \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)}^p.$$

定理 5.3 证毕. □

定理 5.4 假设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是一个非齐度量测度空间, 令 $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty, p \neq q, \alpha \in (0, 1-1/q), \rho \in (1, \infty)$ 且 $\gamma \in [1, \infty)$. 令 λ 满足 η -弱逆倍条件, $\eta \in (0, \min\{(1-1/q-\alpha)p, \alpha p\})$. 若 T 是非齐度量测度空间上的一个 Caldeón-Zygmund 算子且在 $L^2(\mu)$ 上有界, 则 T 是从 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 到 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)$ 有界的.

证明 为了简便, 假设 $\rho = 2$. 对于任意的 $f \in \tilde{H}\dot{K}_{atb,q,2}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$, 只需证明

$$\|Tf\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)}^p \leq C \|f\|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,2}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)}^p.$$

由定理 4.5, 存在 $(\alpha, p, q, \gamma, 2)_\lambda$ -原子块 b_i , $b_i = \sum_{j=1}^2 \lambda_{i,j} a_{i,j}$, $\text{supp}(a_{i,j}) \subset B_{i,j} \subset B_i$, 其中 $B_i = B(x_0, 2^i)$, 使得 $f = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i$. 继续分解

$$\begin{aligned}
 \|Tf\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)}^p &\leq \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^l)]^{\alpha p} \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 |\lambda_{i,j}| \| (Ta_{i,j}) \chi_l \|_{L^q(\mu)} \right\}^p \\
 &\leq \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^l)]^{\alpha p} \left\{ \sum_{i=-\infty}^{l-2} \sum_{j=1}^2 |\lambda_{i,j}| \| (Ta_{i,j}) \chi_l \|_{L^q(\mu)} \right\}^p
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^l)]^{\alpha p} \left\{ \sum_{i=l-1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 |\lambda_{i,j}| \| (Ta_{i,j}) \chi_l \|_{L^q(\mu)} \right\}^p$$

$$=: II_1 + II_2.$$

接下来的证明与定理 5.3 的证明类似并且更简单, 因为在这里只需证明当 $0 < p \leq 1$ 的情形, 所以, 此处省略后面的证明过程. $\square$

注 5.5 由 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 与 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$ 等价知, Calderón-Zygmund 算子 T 也是从 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$ 到 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)$ 有界的.

下面证明非齐度量测度空间上的 Calderón-Zygmund 算子 T 从 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 到 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,(\delta-v\alpha)/2}(\mu)$ 的有界性. 若对于所有的 $h \in L_b^\infty(\mu)$, $\int_{\mathcal{X}} h(y) d\mu(y) = 0$, 有

$$\int_{\mathcal{X}} Th(y) d\mu(y) = 0,$$

则称 T 满足 $T^*1 = 0$.

定理 5.6 假设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是一个非齐度量测度空间. 令 $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p \neq q$, $\alpha \in (0, \delta/v)$, $\rho \in (1, \infty)$, $\gamma \in [1, \infty)$, 且 $\epsilon \in (0, \infty)$. 设 T 是非齐度量测度空间上的一个 Calderón-Zygmund 算子, 若 T 在 $L^2(\mu)$ 上有界, 且 $T^*1 = 0$, 则 T 是从 $\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 到 $\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,(\delta-v\alpha)/2}(\mu)$ 有界的.

证明 只需证明对于任意的 $(\alpha, p, q, 2, 2)_\lambda$ -原子块 b , Tb 是一个 $(\alpha, p, q, 1, (\delta-v\alpha)/2, 2)_\lambda$ -分子块, 并且

$$|Tb|_{\tilde{H}\dot{K}_{mb,q,2}^{\alpha,p,1,(\delta-v\alpha)/2}(\mu)} \leq C|b|_{\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,2}^{\alpha,p,2}(\mu)}.$$

事实上, 对于任意的 $(\alpha, p, q, 2, 2)_\lambda$ -原子块 b , $b = \sum_{j=1}^2 \lambda_j a_j$, $\text{supp}(a_j) \subset B_j \subset B$, 且

$$\|a_j\|_{L^q(\mu)} \leq [\lambda(x_0, r_B)]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_j, B}^{(2),p}]^{-2}. \quad (5.4)$$

令 $B_0 = 8B$, 进一步分解

$$Tb = (Tb)\chi_{B_0} + \sum_{k=1}^{\infty} (Tb)\chi_{2^k B_0 \setminus 2^{k-1} B_0} =: J_1 + J_2.$$

对于 J_1 , 由于 $B_j \subset B$, 显然, $3B_j \subset 8B = B_0$. 令 $N_j := N_{2B_j, B_0}^{(2)} \geq -1$. 不失一般性, 假设 $N_j \geq 3$. 由于 $2B_j \subset B_0 \subset 2^5 B_j$, 对于其他情形, 即当 $N_j \in [-1, 3)$ 时可以转化为 $N_j \geq 3$. 因此,

$$J_1 = \sum_{j=1}^2 \lambda_j (Ta_j)\chi_{2B_j} + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{N_j-2} \lambda_j (Ta_j)\chi_{2^{i+1}B_j \setminus 2^i B_j} + \sum_{j=1}^2 \lambda_j (Ta_j)\chi_{B_0 \setminus 2^{N_j-1} B_j}$$

$$=: J_{1,1} + J_{1,2} + J_{1,3}.$$

对于 $J_{1,1}$, 由引理 5.2、(5.4)、(2.1)、引理 2.11 和 $\tilde{K}_{2B_j, B_0}^{(2),p} \geq 1$, 注意到, 对于任意的 $j = 1, 2$, 有

$$\|(Ta_j)\chi_{2B_j}\|_{L^q(\mu)} \leq C\|a_j\|_{L^q(\mu)} \leq C[\lambda(x_0, r_B)]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_j, B}^{(2),p}]^{-2} \leq C[\lambda(x_0, 8r_B)]^{-\alpha} [\tilde{K}_{2B_j, 8B}^{(2),p}]^{-2}$$

$$\leq c_7 [\lambda(x_0, 4r_{B_0})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{2B_j, 4B_0}^{(2),p}]^{-1},$$

其中 c_7 是不依赖于 a_j 和 j 的正常数. 令 $\sigma_{j,1} := c_7 \lambda_j$, $\tau_{j,1} := c_7^{-1} (Ta_j)\chi_{2B_j}$, 则 $J_{1,1} = \sum_{j=1}^2 \sigma_{j,1} \tau_{j,1}$, $\text{supp}(\tau_{j,1}) \subset 2B_j \subset B_0$, 且

$$\|\tau_{j,1}\|_{L^q(\mu)} \leq [\lambda(x_0, 4r_{B_0})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{2B_j, 4B_0}^{(2),p}]^{-1}.$$

对于 $J_{1,3}$, 由 $B_0 \subset 2^{N_j+3}B_j$, 有 $r_{B_0} \sim r_{2^{N_j-1}B_j}$. 由 (5.1)、(2.2)、(5.4)、(2.1)、Hölder 不等式和引理 2.11, 并且注意到 $\tilde{K}_{B_j,B}^{(2),p} \geq 1$, 可知对于任意的 $j = 1, 2$, 有

$$\begin{aligned} \|(Ta_j)\chi_{B_0 \setminus 2^{N_j-1}B_j}\|_{L^q(\mu)} &\leq C \left\{ \int_{8B \setminus 2^{N_j-1}B_j} \left[\int_{B_j} \frac{|a_j(y)|}{\lambda(x, d(x, y))} d\mu(y) \right]^q d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C \left\{ \int_{8B \setminus 2^{N_j-1}B_j} \left[\int_{B_j} \frac{|a_j(y)|}{\lambda(c_{B_j}, d(x, c_{B_j}))} d\mu(y) \right]^q d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C \frac{[\mu(8B \setminus 2^{N_j-1}B_j)]^{1/q}}{\lambda(c_{B_j}, 2^{N_j-1}r_{B_j})} [\mu(B_j)]^{1/q'} \|a_j\|_{L^q(\mu)} \\ &\leq C [\mu(8B)]^{1/q-1} [\mu(8B)]^{1/q'} [\lambda(x_0, r_B)]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_j,B}^{(2),p}]^{-2} \\ &\leq c_8 [\lambda(x_0, r_{4B_0})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{2B_0,4B_0}^{(2),p}]^{-1}, \end{aligned}$$

其中 c_8 是不依赖于 a_j 和 j 的正常数. 令 $\sigma_{j,3} := c_8 \lambda_j$, $\tau_{j,3} := c_8^{-1} (Ta_j)\chi_{B_0 \setminus 2^{N_j-1}B_j}$, 则

$$J_{1,3} = \sum_{j=1}^2 \sigma_{j,3} \tau_{j,3}, \quad \text{supp}(\tau_{j,3}) \subset 16B = 2B_0, \quad \text{且} \quad \|\tau_{j,3}\|_{L^q(\mu)} \leq [\lambda(x_0, 4r_{B_0})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{2B_0,4B_0}^{(2),p}]^{-1}.$$

对于 $J_{1,2}$, 与 $J_{1,3}$ 类似有

$$\begin{aligned} \|(Ta_j)\chi_{2^{i+1}B_j \setminus 2^iB_j}\|_{L^q(\mu)} &\leq C \left\{ \int_{2^{i+1}B_j \setminus 2^iB_j} \left[\int_{B_j} \frac{|a_j(y)|}{\lambda(x, d(x, y))} d\mu(y) \right]^q d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C \left\{ \int_{2^{i+1}B_j \setminus 2^iB_j} \left[\int_{B_j} \frac{|a_j(y)|}{\lambda(c_{B_j}, d(x, c_{B_j}))} d\mu(y) \right]^q d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C \int_{B_j} |a_j(y)| d\mu(y) \left[\int_{2^{i+1}B_j \setminus 2^iB_j} \frac{1}{[\lambda(c_{B_j}, 2^i r_{B_j})]^q} d\mu(x) \right]^{1/q} \\ &\leq C [\mu(B_j)]^{1/q'} \|a_j\|_{L^q(\mu)} \frac{[\mu(2^{i+1}B_j)]^{1/q}}{\lambda(c_{B_j}, 2^i r_{B_j})} \\ &\leq C \frac{[\mu(2^{i+1}B_j)]}{\lambda(c_{B_j}, 2^i r_{B_j})} [\mu(2^{i+1}B_j)]^{1/q-1} [\mu(B_j)]^{1/q'} [\lambda(x_0, r_B)]^{-\alpha} [\tilde{K}_{B_j,B}^{(2),p}]^{-2} \\ &\leq c_9 \frac{\mu(2^{i+1}B_j)}{\lambda(c_{B_j}, 2^i r_{B_j})} [\tilde{K}_{B_j,B}^{(2),p}]^{-1} [\lambda(x_0, r_{4B_0})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{2^{i+2}B_j,4B_0}^{(2),p}]^{-1}, \end{aligned}$$

其中 c_9 是不依赖于 a_j 、 j 和 i 的正常数. 令

$$\sigma_{j,2} := c_9 \lambda_j \frac{\mu(2^{i+1}B_j)}{\lambda(c_{B_j}, 2^i r_{B_j})} [\tilde{K}_{B_j,B}^{(2),p}]^{-1}, \quad \tau_{j,2} := \left[c_9 \frac{\mu(2^{i+1}B_j)}{\lambda(c_{B_j}, 2^i r_{B_j})} \right]^{-1} \tilde{K}_{B_j,B}^{(2),p} (Ta_j)\chi_{2^{i+1}B_j \setminus 2^iB_j},$$

则 $J_{1,2} = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{N_j-2} \sigma_{j,2}^{(i)} \tau_{j,2}^{(i)}$, $\text{supp}(\tau_{j,2}) \subset 2^{i+2}B_j \subset 2B_0$, 且

$$\|\tau_{j,2}^{(i)}\|_{L^q(\mu)} \leq [\lambda(x_0, 4r_{B_0})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{2^{i+2}B_j,4B_0}^{(2),p}]^{-1}.$$

下面估计 J_2 . 由几何双倍条件可知, 对于任意的 $k \in \mathbb{N}$, 存在一个球覆盖 $\{B_{k,j}\}_{j=1}^{M_0}$, 且它们的势 $M_0 \leq N_0 8^n$, 其中这些球的半径都是 $2^{k-3}r_{B_0}$, $\tilde{U}_k(B_0) := 2^k B_0 \setminus 2^{k-1} B_0$. 不失一般性, 假设这些球的中心都属于 $\tilde{U}_k(B_0)$. 令 $C_{k,1} := B_{k,1}$, $C_{k,l} := B_{k,l} \setminus \bigcup_{m=1}^{l-1} B_{k,m}$, $l = 2, \dots, M_0$ 且对于所有的 $l = 1, \dots, M_0$,

有 $D_{k,l} := C_{k,l} \cap \tilde{U}_k(B_0)$, 则 $\{D_{k,l}\}_{l=1}^{M_0}$ 是互不相交的, $\tilde{U}_k(B_0) = \bigcup_{l=1}^{M_0} D_{k,l}$, 且对于任意的 $l = 1, \dots, M_0$, 有 $D_{k,l} \subset 2B_{k,l} \subset U_k(B_0) := 2^{k+2}B_0 \setminus 2^{k-2}B_0$. 因此,

$$J_2 = \sum_{k=0}^{\infty} Tb \sum_{l=0}^{M_0} \chi_{D_{k,l}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{M_0} (Tb) \chi_{D_{k,l}}.$$

因为 $\int_{\mathcal{X}} b(y) d\mu(y) = 0$, 由 (5.2)、(2.2)、(2.1) 和 (5.4), 应用 Hölder 不等式和引理 2.11, 同时注意到 $4B_{k,l} \subset 2^{k+1}B_0$ 和 $\tilde{K}_{B_j, B}^{(2), p} \geq 1$, 可以得到

$$\begin{aligned} \|(Tb)\chi_{D_{k,l}}\|_{L^q(\mu)} &\leq \left\{ \int_{D_{k,l}} \left[\int_B |b(y)| |K(x, y) - K(x, c_B)| d\mu(y) \right]^q d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C \left\{ \int_{D_{k,l}} \left[\int_B |b(y)| \frac{[d(y, c_B)]^\delta}{[d(x, c_B)]^\delta \lambda(c_B, d(x, c_B))} d\mu(y) \right]^q d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C \frac{r_B^\delta [\mu(D_{k,l})]^{1/q}}{\lambda(c_B, r_{2^{k-1}B_0})(r_{2^{k-1}B_0})^\delta} \int_B |b(y)| d\mu(y) \\ &\leq C 2^{-k\delta} [\mu(2^{k+1}B_0)]^{1/q-1} \sum_{j=1}^2 |\lambda_j| [\mu(B_j)]^{1/q'} \|a_j\|_{L^q(\mu)} \\ &\leq C 2^{-k\delta} [\mu(2^{k+1}B_0)]^{1/q-1} \sum_{j=1}^2 |\lambda_j| [\mu(2^{k+1}B_0)]^{1/q'} [\lambda(x_0, r_B)]^{-\alpha} \\ &\leq C 2^{-k(\delta-v\alpha)} [\mu(2^{k+1}B_0)]^{1/q-1} \sum_{j=1}^2 |\lambda_j| [\mu(2^{k+1}B_0)]^{1/q'} [\lambda(x_0, r_{2^{k+2}B_0})]^{-\alpha} \\ &\leq c_{10} 2^{-\frac{k(\delta-v\alpha)}{2}} 2^{-\frac{k(\delta-v\alpha)}{2}} \sum_{j=1}^2 |\lambda_j| [\lambda(x_0, r_{2^{k+2}B_0})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{2B_{k,l}, 2^{k+2}B_0}^{(2), p}]^{-1}, \end{aligned}$$

其中 c_{10} 是不依赖于 b 和 k 的正常数. 令

$$\lambda_{k,l} := c_{10} 2^{-\frac{k(\delta-v\alpha)}{2}} \sum_{j=1}^2 |\lambda_j|, \quad m_{k,l} := \lambda_{k,l}^{-1} (Tb) \chi_{D_{k,l}},$$

则 $J_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{M_0} \lambda_{k,l} m_{k,l}$, $\text{supp}(m_{k,l}) \subset 2B_{k,l} \subset U_k(B_0)$, 且

$$\|m_{k,l}\|_{L^q(\mu)} \leq 2^{-\frac{k(\delta-v\alpha)}{2}} [\lambda(x_0, 2^{k+2}r_{B_0})]^{-\alpha} [\tilde{K}_{2B_{k,l}, 2^{k+2}B_0}^{(2), p}]^{-1}.$$

由 J_1 和 J_2 的估计, 我们得到 Tb 是一个 $(\alpha, p, q, 1, \delta, 2)_\lambda$ -分子块, 且

$$\begin{aligned} |Tb|_{\tilde{H}K_{mb, q, 2}^{\alpha, p, 1, (\delta-v\alpha)/2}(\mu)} &= \sum_{j=1}^2 |\sigma_{j,1}|^p + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{N_j-1} |\sigma_{j,2}^{(i)}|^p + \sum_{j=1}^2 |\sigma_{j,3}|^p + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{M_0} |\lambda_{k,l}|^p \\ &\leq C \left\{ \sum_{j=1}^2 |\lambda_j|^p + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{N_j-2} |\lambda_j|^p \left[\frac{\mu(2^{i+3}B_j)}{\lambda(c_{B_j}, 2^i r_{B_j})} \right]^p [\tilde{K}_{B_j, B}^{(2), p}]^{-p} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{M_0} 2^{-\frac{k(\delta-v\alpha)}{2}} \sum_{j=1}^2 |\lambda_j|^p \right\} \\ &\leq C \left\{ \sum_{j=1}^2 |\lambda_j|^p + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{k(\delta-v\alpha)}{2}} M_0 \sum_{j=1}^2 |\lambda_j|^p \right\} \leq C \sum_{j=1}^2 |\lambda_j|^p \end{aligned}$$

$$\leq C|b|\tilde{H}\dot{K}_{atb,q,2}^{\alpha,p,2}(\mu).$$

因此完成了定理 5.6 的证明. $\square$

6 非齐次 Herz 型空间

本节简要介绍一下在非齐度量测度空间上的非齐次 Herz 空间 $K_q^{\alpha,p}(\mu)$ 、原子 Herz 型 Hardy 空间 $\tilde{H}K_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 和分子 Herz 型 Hardy 空间 $\tilde{H}K_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$.

以下是在非齐度量测度空间上的非齐次 Herz 空间以及它的分解.

定义 6.1 令 $-\infty < \alpha < \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$. 假设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是一个非齐度量测度空间, 则在非齐度量测度空间上非齐次 Herz 空间 $K_q^{\alpha,p}(\mu)$ 定义为

$$K_q^{\alpha,p}(\mu) = \{f \in L_{\text{loc}}^q(\mathcal{X}) : \|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\mu)} < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\mu)} = \left\{ \|f\chi_{B_0}\|_{L^q(\mu)}^p + \sum_{k=1}^{+\infty} [\lambda(x_0, 2^k)]^{\alpha p} \|f\chi_k\|_{L^q(\mu)}^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

定理 6.2 令 $0 < \alpha < \infty$, $0 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$. 设 λ 满足 η -弱逆倍条件, $\eta \in (0, \min\{\frac{\alpha p}{2}, \frac{\alpha p}{2(p-1)}\})$, 则 $f \in K_q^{\alpha,p}(\mu)$ 当且仅当

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k b_k(x),$$

其中每个 $b_k(x)$ 都是限制型二进中心 (α, q) -块, $\sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda_k|^p < \infty$, 且

$$\|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\mu)} \sim \inf \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

这里的下确界取遍 f 的所有分解. 所谓 b 是限制型二进中心 (α, q) -块, 是指 b 满足定义 3.2 中的 (ii) 且把 (i) 改为 (i'): $\text{supp } b \subset B(x_0, r)$, $r \geq 1$, 其中 $B(x_0, r) = \{x \in \mathcal{X} : d(x_0, x) < r\}$, $r = 2^k$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

类似地, 对于非齐次原子 Herz 型 Hardy 空间 $\tilde{H}K_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 和分子 Herz 型 Hardy 空间 $\tilde{H}K_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$, 也只需对齐次原子 Herz 型 Hardy 空间和分子 Herz 型 Hardy 空间稍加修改即可得到, 即将 $r > 0$ 修改为 $r \geq 1$. 将 $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k b_k(x)$ 修改为 $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k b_k(x)$.

同样, 对于 $K_q^{\alpha,p}(\mu)$ 、 $\tilde{H}K_{atb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma}(\mu)$ 和 $\tilde{H}K_{mb,q,\rho}^{\alpha,p,\gamma,\epsilon}(\mu)$, 也可以得到第 4 和 5 节中类似的结果.

致谢 作者感谢审稿人的仔细审阅及提出的宝贵意见和建议.

参考文献

- 1 Fefferman C, Stein E M. H^p spaces of several variables. Acta Math, 1972, 129: 137–193
- 2 Coifman R R, Meyer Y, Stein E M. Some new function spaces and their applications to harmonic analysis. J Funct Anal, 1985, 62: 304–335
- 3 Cao J, Yang D. Hardy spaces $H_{L^p}(\mathbb{R}^n)$ associated with operators satisfying k -Davies-Gaffney estimates. Sci China Math, 2012, 55: 1403–1440

- 4 Fu X, Yang D. Products of functions in $H^1_\rho(\mathcal{X})$ and $BMO_\rho(\mathcal{X})$ over RD-spaces and applications to Schrödinger operators. *J Geom Anal*, 2017, 27: 2938–2976
- 5 Jiang R J, Yang D, Zhou Y. Orlicz-Hardy spaces associated with operators. *Sci China Ser A*, 2009, 52: 1042–1080
- 6 陈杰诚, 王慧. 奇异积分算子在乘积 TIREBEL-LIZORKIN 空间. *中国科学 A 辑*, 2009, 39: 861–872
- 7 Li B D, Bownik M, Yang D, et al. Anisotropic singular integrals in product spaces. *Sci China Math*, 2010, 53: 3163–3178
- 8 Liu J, Yang D, Yuan W. Anisotropic Hardy-Lorentz spaces and their applications. *Sci China Math*, 2016, 59: 1669–1720
- 9 刘丽光, 杨大春. RD-空间上 Hardy 空间的极大函数特征及其应用. *中国科学 A 辑*, 2008, 38: 490–518
- 10 Yang D, Yang S. Local Hardy spaces of Musielak-Orlicz type and their applications. *Sci China Math*, 2012, 55: 1677–1720
- 11 Zhao K. Hardy-Hausdorff spaces on the Heisenberg group. *Sci China Math*, 2016, 59: 2167–2184
- 12 Fan D, Yang D. Herz-type Hardy spaces on Vilenkin groups and their applications. *Sci China Ser A*, 2000, 43: 481–494
- 13 Lu S. Herz type spaces. *Adv Math (China)*, 2004, 33: 257–272
- 14 Lu S, Tang L, Yang D. Boundedness of commutators on homogeneous Herz spaces. *Sci China Ser A*, 1998, 41: 1023–1033
- 15 陆善镇, 杨大春. 加权 Herz 型的 Hardy 空间及其应用. *中国科学 A 辑*, 1995, 25: 235–245
- 16 Lu S, Yang D. Some characterizations of the Hardy spaces associated with a kind of block space. *J Beijing Normal Univ (Natur Sci)*, 1991, 27: 269–279
- 17 Lu S, Yang D. Herz-type Sobolev and Bessel potential spaces and their applications. *Sci China Ser A*, 1997, 40: 113–129
- 18 Lu S, Yang D. The decomposition of weighted Herz space on $\mathbb{R}^n$ and their applications. *Sci China Math*, 1995, 38: 147–158
- 19 Lu S, Yang D, Hu G. Herz Type Spaces and Their Applications. Beijing: Science Press, 2008
- 20 Grafakos L, Liu L, Yang D. Boundedness of paraproduct operators on RD-spaces. *Sci China Math*, 2010, 53: 2097–2114
- 21 Han Y, Yang D. Triebel-Lizorkin spaces with non-doubling measures. *Studia Math*, 2004, 162: 105–140
- 22 Hu G, Meng Y, Yang D. Endpoint estimate for maximal commutators with non-doubling measures. *Acta Math Sci*, 2006, 26: 271–280
- 23 Hu G, Yang D, Yang D. Weighted estimates for commutators of singular integral operators with non-doubling measures. *Sci China Ser A*, 2007, 50: 1621–1641
- 24 Lin H, Meng Y, Yang D. Weighted estimates for commutators of multilinear Calderón-Zygmund operators with non-doubling measures. *Acta Math Sci*, 2010, 30: 1–18
- 25 Tolsa X. BMO, H^1 , and Calderón-Zygmund operators for non doubling measures. *Math Ann*, 2001, 319: 89–149
- 26 Tolsa X. Littlewood-Paley theory and the $T(1)$ theorem with non-doubling measures. *Adv Math*, 2001, 164: 57–116
- 27 Yang D, Yang D, Hu G. The Hardy Space H^1 with Non-Doubling Measures and Their Applications. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 2084. Berlin: Springer-Verlag, 2013
- 28 Hytönen T. A framework for non-homogeneous analysis on metric spaces, and the RBMO space of Tolsa. *Publ Mat*, 2010, 54: 485–504
- 29 Fu X, Yang D, Yuan W. Generalized fractional integrals and their commutators over non-homogeneous metric measure spaces. *Taiwanese J Math*, 2014, 18: 509–557
- 30 Hu G, Meng Y, Yang D. Weighted norm inequalities for multilinear Calderón-Zygmund operators on non-homogeneous metric measure spaces. *Forum Math*, 2014, 26: 1289–1322
- 31 Lin H, Wu S, Yang D. Boundedness of certain commutators over non-homogeneous metric measure spaces. *Anal Math Phys*, 2017, 7: 187–218
- 32 Lin H, Yang D. Equivalent boundedness of Marcinkiewicz integrals on non-homogeneous metric measure spaces. *Sci China Math*, 2014, 57: 123–144
- 33 Lin H, Yang D. An interpolation theorem for sublinear operators on non-homogeneous metric measure spaces. *Banach J Math Anal*, 2012, 6: 168–179
- 34 Lin H, Yang D. Spaces of type BLO on non-homogeneous metric measure. *Front Math China*, 2011, 6: 271–292
- 35 Liu S, Yang D, Yang D. Boundedness of Calderón-Zygmund operators on non-homogeneous metric measure spaces: Equivalent characterizations. *J Math Anal Appl*, 2012, 386: 258–272
- 36 Liu S, Meng Y, Yang D. Boundedness of maximal Calderón-Zygmund operators on non-homogeneous metric measure spaces. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 2014, 144: 567–589
- 37 Fu X, Lin H B, Yang D, et al. Hardy spaces H^p over non-homogeneous metric measure spaces and their applications. *Sci China Math*, 2015, 58: 309–388
- 38 Hytönen T, Yang D, Yang D. The Hardy space H^1 on non-homogeneous metric spaces. *Math Proc Cambridge Philos*

- Soc, 2012, 153: 9–31
- 39 Coifman R R, Weiss G. *Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogènes*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 242. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1971
- 40 Heinonen J. *Lectures on Analysis on Metric Spaces*. New York: Springer-Verlag, 2001
- 41 Tan C, Li J. Littlewood-Paley theory on metric spaces with non doubling measures and its applications. *Sci China Math*, 2015, 58: 983–1004
- 42 Gong R, Li J, Yan L. A local version of Hardy spaces associated with operators on metric spaces. *Sci China Math*, 2013, 56: 315–330
- 43 Hytönen T, Martikainen H. Non-homogeneous Tb theorem and random dyadic cubes on metric measure spaces. *J Geom Anal*, 2012, 22: 1071–1107
- 44 Bui T A, Duong X T. Hardy spaces, regularized BMO spaces and the boundedness of Calderón-Zygmund operators on non-homogeneous spaces. *J Geom Anal*, 2013, 23: 895–932
- 45 Hytönen T, Liu S, Yang D, et al. Boundedness of Calderón-Zygmund operators on non-homogeneous metric measure spaces. *Canad J Math*, 2012, 64: 892–923

Herz type Hardy spaces on non-homogeneous metric measure space

Yaoyao Han & Kai Zhao

Abstract Let $(\mathcal{X}, d, \mu)$ be a non-homogeneous metric measure space satisfying both the geometrically doubling and the upper doubling conditions. In this paper, the Herz spaces on the non-homogeneous metric measure space are introduced. Then the decomposition of the Herz space by the central blocks is obtained. The atomic Herz type Hardy spaces and the molecular Herz type Hardy spaces on the non-homogeneous metric measure space via the discrete coefficient $\tilde{K}_{B,S}^{(\rho),p}$ are also defined. In addition, the equivalence of the atomic Herz type Hardy spaces and the molecular Herz type Hardy spaces is established. As the applications of these spaces, some boundedness of Calderón-Zygmund operators on the Herz type Hardy spaces are discussed.

Keywords non-homogeneous metric measure space, Herz space, Hardy space, central block, atomic block, molecular block, Calderón-Zygmund operator

MSC(2010) 42B30, 42B20, 42B35

doi: 10.1360/N012018-00118