近 Kähler 流形的强正则性定理

献给王斯雷教授 85 华诞

李嘉禹, 张希*

中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026

E-mail: jiayuli@ustc.edu.cn, mathzx@ustc.edu.cn

收稿日期: 2018-04-09; 接受日期: 2018-07-11; 网络出版日期: 2018-10-09; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11625106, 11571332 和 11721101) 资助项目

摘要 本文首先考虑从近 Kähler 流形到 Kähler 流形调和映照的复解析性, 并导出一个推广的 Bochner 型等式. 作为应用, 本文得到一个关于紧致近 Kähler 流形的强正则性定理.

关键词 近 Kähler 流形 调和映照 复解析性

MSC (2010) 主题分类 53C07, 58E15

1 引言

Siu^[1] 利用调和映照的复解析性证明了如下关于紧致 Kähler 流形的强正则性定理.

定理 1.1^[1] 令 (N, h, J') 是紧致复维数至少为 2 的 Kähler 流形, 并设其曲率张量是强负的 (strongly negative), 则任何与 N 同伦的紧致 Kähler 流形必与 N 双全纯或反双全纯等价.

本文研究近 Kähler 流形的强正则性定理. 令 (M^m, g, J) 为近 Hermite 流形, 其实维数为 $2m$. 如果 $\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$ 是闭的, 则称 (M^m, g, J) 是近 Kähler 流形. 记 $\mathbb{N}$ 为对应于近复结构 $J: TM \rightarrow TM$ 的 Nijenhuis 张量. 根据 Newlander-Nirenberg 定理^[2], $\mathbb{N}$ 消失当且仅当 J 是可积的. 在文献 [3] 中, Lichnerowicz 引入了第二典则联络 (the second canonical connection) 的概念, 该联络也称为 (M, g, J) 上的 Chern 联络, 因为在可积情形该联络跟切丛上的 Chern 联络是一致的 (参见文献 [4]). 本文将利用该典则联络和活动标架法来研究. 对于近 Hermite 几何来说, 该典则联络 ∇ 要比 Levi-Civita 联络 D 使用起来更为方便, 这一点在 Tosatti 等^[5] 研究辛流形上 Calabi-Yau 方程中得到体现.

假设 (M, g, J) 为紧致的近 Hermite 流形, $f: (M, g, J) \rightarrow (N, h)$ 是光滑映照, 这里 (N, h) 是一 Riemann 流形. 定义 Hermite 张量场 $\tau'(f)$ 如下:

$$\tau'(f) = \sum_{\alpha=1}^m (\nabla df(e_\alpha, \bar{e}_\alpha) + \nabla df(\bar{e}_\alpha, e_\alpha)), \quad (1.1)$$

英文引用格式: Li J Y, Zhang X. The strong rigidity of compact almost-Kähler manifolds (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1355–1370, doi: 10.1360/N012018-00088

这里 $\{e_1, \dots, e_m\}$ 是 M 上的局部酉标架,

$$\nabla df(X, Y) = D_X^{f^{-1}TN}(df(Y)) - df(\nabla_X Y), \quad (1.2)$$

其中 X 和 Y 是向量场. 如果映照 $f : (M, g, J) \rightarrow (N, h)$ 满足 $\tau'(f) = 0$, 则被称为 Hermite 调和的 (Hermitian-harmonic), 这里 Hermite 张量场 $\tau'(f)$ 与通常的张量场的差别仅仅是将出发流形上的 Levi-Civita 联络用第二典则联络来替换. 第 2 节将指出, 如果出发流形是半 Kähler (或余辛的 (cosymplectic)), 则 Hermite 张量场 $\tau'(f)$ 与通常的张量场 $\tau(f)$ 是一致的. 根据文献 [6, 引理 4.1] 中的结果, 我们很容易验证近 Hermite 流形间的 J -全纯映照, 如果目标流形是拟 Kähler (quasi-Kähler), 则必是 Hermite 调和的. 由此可看出 Hermite 调和映照比通常的调和映照更适用于近 Hermite 几何的研究. 受萧荫堂关于调和映照复解析性结果的启发, 本文中我们希望研究近 Hermite 流形间的 Hermite 调和映照何时是 J -全纯或反全纯映照, 在某些特殊情形我们解决了这一问题.

记 (M, g, J) 为紧致近 Kähler 流形, (N, h, J') 为紧致 Kähler 流形. 我们在目标流形上取局部复坐标, 在出发流形上取局部酉标架 $\{e_\alpha\}$, 并记

$$\varphi = \sqrt{-1}g_{i\bar{j}}f_\gamma^i f_\delta^{\bar{j}} N_{\delta\bar{\alpha}}^\gamma \bar{\theta}^\alpha \in \Omega^{0,1}(M), \quad (1.3)$$

$$\bar{\varphi} = -\sqrt{-1}g_{i\bar{j}}f_\delta^i f_\gamma^{\bar{j}} \overline{N_{\delta\bar{\alpha}}^\gamma} \theta^\alpha \in \Omega^{1,0}(M), \quad (1.4)$$

这里 $\{\theta^\alpha\}$ 为 $\{e_\alpha\}$ 的对偶标架, $N_{\delta\bar{\alpha}}^\gamma$ 是出发流形上联络 ∇ 的挠率分量, $\{g_{i\bar{j}}\}$ 则是 N 上 Kähler 度量的分量. 我们将导出关于光滑映照 $f : M \rightarrow N$ 的如下 Bochner 型等式.

命题 1.1 (Bochner 型恒等式) 令 $f : M \rightarrow N$ 是光滑映照, 则成立

$$\begin{aligned} & d(\bar{\partial}(g_{i\bar{j}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial f^{\bar{j}}) - \partial(g_{i\bar{j}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial f^{\bar{j}})) \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} - 4d(\varphi + \bar{\varphi}) \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= 2R_{i\bar{j}k\bar{l}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial f^{\bar{j}} \wedge \partial f^k \wedge \bar{\partial}f^{\bar{l}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} - 2g_{i\bar{j}}D'\bar{\partial}f^i \wedge D''\partial f^{\bar{j}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\quad - 2g_{i\bar{j}}D''\bar{\partial}f^i \wedge D'\partial f^{\bar{j}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} - 2g_{i\bar{j}}D'\partial f^i \wedge D''\bar{\partial}f^{\bar{j}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

利用上述等式, 我们可得如下复解析性定理.

定理 1.2 令 (M, g, J) 为紧致近 Kähler 流形, (N, h, J') 为紧致 Kähler 流形并且其曲率张量是强负的. 假设 $f : M \rightarrow N$ 是调和映照且其在某点处的秩至少为 3, 则 f 是全纯或反全纯时当且仅当对于任意 $X, Y \in TM$ 必有 $df(N(X, Y)) = 0$.

当出发流形是 Kähler 时, 定理 1.2 就是萧荫堂所得的复解析定理. 在一定的假设条件下, 我们可得如下关于近 Kähler 流形的正则性条件.

定理 1.3 令 (M, g, J) 为紧致近 Kähler 流形, (N, h, J') 为紧致 Kähler 流形并且其曲率张量是强负的, $\dim_{\mathbb{C}} M = \dim_{\mathbb{C}} N \geq 2$. 假设 (M, g, J) 满足: 对于任何 M 上的复值函数 φ 均成立 $|\bar{\partial}\bar{\partial}\varphi|^2 \leq \lambda|\bar{\partial}\partial\varphi|^2$, 这里常数 $\lambda < \frac{1}{2}$. 如果 M 和 N 具有相同的同伦型, 则 (M, J) 必双全纯或反全纯等价于 (N, J') . 特别地, 此时 J 必是可积的.

如果 (M, J) 是复流形, 则显然对于任何复值函数 φ 均成立 $\bar{\partial}\bar{\partial}\varphi = 0$. 由此, 定理 1.3 可看作文献 [1] 中正则性定理在近 Kähler 情形的推广.

2 预备知识及基本概念

令 (M^m, g, J) 为近 Hermite 流形, 其实维数为 $2m$, $J: TM \rightarrow TM$ 为近复结构. 首先回顾 Nijenhuis 张量, 其定义如下:

$$4N(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y], \quad (2.1)$$

这里 X 和 Y 为切向量场. 定义 Kähler 形式如下:

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y). \quad (2.2)$$

为简单起见, 在本文的后面部分将 $g(X, Y)$ 记为 (X, Y) .

记 $T^C M$ 为切丛的复化丛, 则根据 J 的 $\pm\sqrt{-1}$ -特征空间有如下分解:

$$T^C M = T^{1,0} M \oplus T^{0,1} M, \quad (2.3)$$

对应地每个切向量 $X \in T^C M$ 可写为 $X = X^{1,0} + X^{0,1}$, 这里

$$X^{1,0} = \frac{1}{2}(X - \sqrt{-1}JX), \quad X^{0,1} = \frac{1}{2}(X + \sqrt{-1}JX). \quad (2.4)$$

局部地可选取 TM 的幺正标架 $\{x_1, \dots, x_m, Jx_1, \dots, Jx_m\}$ 使得

$$\begin{aligned} T^{1,0} M &= \text{span}_C \left\{ e_1 = \frac{x_1 - \sqrt{-1}Jx_1}{\sqrt{2}}, \dots, e_m = \frac{x_m - \sqrt{-1}Jx_m}{\sqrt{2}} \right\}, \\ T^{0,1} M &= \text{span}_C \left\{ \bar{e}_1 = \frac{x_1 + \sqrt{-1}Jx_1}{\sqrt{2}}, \dots, \bar{e}_m = \frac{x_m + \sqrt{-1}Jx_m}{\sqrt{2}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

这里 $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ 也称为局部 Hermite 标架.

记 Riemann 流形 (M, g) 上的 Levi-Civita 联络为 D . J 的散度可表达为

$$\delta J = \text{div}(J) = \sum_{\alpha=1}^m [D_{x_\alpha} J(x_\alpha) + D_{Jx_\alpha} J(Jx_\alpha)] = \sum_{\alpha=1}^m [(D_{\bar{e}_\alpha} J)(e_\alpha) + (D_{e_\alpha} J)(\bar{e}_\alpha)]. \quad (2.6)$$

注 2.1 在相差一个常数下, 向量场 $J\delta J$ 和 Lee 形式对偶 (参见文献 [7]), 因而该向量场也称为 Lee 向量场.

定义 2.1 近 Hermite 流形 (M, g, J) 被称为是近 Kähler 的, 即其 Kähler 形式满足 $d\omega = 0$; 被称为拟 Kähler 或 $(1, 2)$ - 辛的 (symplectic), 即其满足: 对于所有的 $X, Y \in C^\infty(TM)$ 都成立

$$(D_X J)Y + (D_{JX} J)JY = 0, \quad (2.7)$$

或等价地, $(d\omega)^{1,2} = 0$.

定义 2.2 近 Hermite 流形 (M, g, J) 被称为是半 Kähler (semi-Kähler) 或余辛的, 即其 Kähler 形式满足 $\delta J = 0$, 或等价地, $d^*\omega = 0$.

注 2.2 从定义容易看出, 如果 (M, g, J) 是拟 Kähler 的, 则必是半 Kähler 的.

定义 2.3 给定近 Hermite 流形 (M, g, J) , 其上一联络 ∇ 称为 Hermite 的, 即其保持度量 g 和近复结构 J , 即 $\nabla g = 0$ 和 $\nabla J = 0$.

引理 2.1 [8] 任何近 Hermite 流形上必存在 Hermite 联络.

在 $T^{1,0}M$ 上取关于度量 g 的局部酉基 $\{e_1, \dots, e_m\}$, 令 $\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ 是其对偶标架. 对于任何 $\alpha = 1, \dots, m$, 必成立

$$J(\nabla e_\alpha) = \sqrt{-1}\nabla e_\alpha,$$

也即 $\nabla e_\alpha \in T^{1,0}M \otimes (T^C M)^*$, 那么必局部存在矩阵值的 1- 形式 $\{\theta_\alpha^\beta\}$, 称为联络 1- 形式, 使得

$$\nabla e_\alpha = \theta_\alpha^\beta e_\beta. \quad (2.8)$$

利用条件 $\nabla g = 0$, 可得

$$\theta_\alpha^\beta + \overline{\theta_\beta^\alpha} = 0, \quad (2.9)$$

即 $\{\theta_\alpha^\beta\}$ 具有反 Hermite 性质. 第一、第二结构方程如下:

$$d\theta^\beta = -\theta_\alpha^\beta \wedge \theta^\alpha + \Xi^\beta, \quad (2.10)$$

$$d\theta_\alpha^\beta = -\theta_\gamma^\beta \wedge \theta_\alpha^\gamma + \Psi_\alpha^\beta, \quad (2.11)$$

这里 $\Xi = (\Xi^1, \dots, \Xi^m)$ 是联络 ∇ 的挠率, $\Psi = \{\Psi_\alpha^\beta\}$ 是曲率形式. 对上述结构方程两边做外微分, 我们可得第一 Bianchi 恒等式

$$d\Xi^\alpha = \Psi_\beta^\alpha \wedge \theta^\beta - \theta_\beta^\alpha \wedge \Xi^\beta, \quad (2.12)$$

和第二 Bianchi 恒等式

$$d\Psi_\beta^\alpha = \Psi_\gamma^\alpha \wedge \theta_\beta^\gamma - \theta_\gamma^\alpha \wedge \Psi_\beta^\gamma. \quad (2.13)$$

定义 2.4 (参见文献 [9, (2.5.4)]) 对于任一近 Hermite 流形 (M, g, J) , 其上第二典则联络 ∇ 定义如下:

$$(\nabla_X Y, Z) = (D_X Y, Z) + \frac{1}{2}((D_X J)JY, Z) + \frac{1}{4}\{(d^c\omega)^+(X, Y, Z) + (d^c\omega)^+(X, JY, JZ)\}, \quad (2.14)$$

这里 X, Y 和 Z 是切向量场.

注 2.3 这里实的 3- 形式 $d^c\omega$ 定义为 $d^c\omega(X, Y, Z) = -d\omega(JX, JY, JZ)$, ψ^+ 是指 3- 形式 ψ 的 $((2, 1) + (1, 2))$ - 分量. 本文将 D 记为 Levi-Civita 联络, ∇ 记为第二典则联络.

如果选取第二典则联络, 根据文献 [9, 第 2 节] 中的结果可知,

$$(\Xi^\alpha)^{1,1} = 0. \quad (2.15)$$

从第一结构方程可得

$$[\overline{e_\alpha}, e_\beta] - \nabla_{\overline{e_\alpha}} e_\beta + \nabla_{e_\beta} \overline{e_\alpha} = 0. \quad (2.16)$$

定义分量 $T_{\beta\gamma}^\alpha$ 和 $N_{\beta\overline{\gamma}}^\alpha$ 如下:

$$(\Xi^\alpha)^{2,0} = T_{\beta\gamma}^\alpha \theta^\beta \wedge \theta^\gamma,$$

$$(\Xi^\alpha)^{0,2} = N_{\beta\overline{\gamma}}^\alpha \overline{\theta^\beta} \wedge \overline{\theta^\gamma},$$

这里 $T_{\beta\gamma}^\alpha = -T_{\gamma\beta}^\alpha$, $N_{\beta\bar{\gamma}}^\alpha = -N_{\bar{\gamma}\beta}^\alpha$. 再次利用第一结构方程可得

$$\begin{aligned} [e_\alpha, e_\beta] - \nabla_{e_\alpha} e_\beta + \nabla_{e_\beta} e_\alpha &= -2T_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma - 2\overline{N_{\alpha\beta}^\gamma} \overline{e_\gamma}, \\ [\overline{e_\alpha}, \overline{e_\beta}] - \nabla_{\overline{e_\alpha}} \overline{e_\beta} + \nabla_{\overline{e_\beta}} \overline{e_\alpha} &= -2N_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma - 2\overline{T_{\alpha\beta}^\gamma} \overline{e_\gamma}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

考虑 Kähler 形式

$$\omega = \sqrt{-1} \theta^\alpha \wedge \overline{\theta^\alpha}.$$

由第一结构方程可得

$$d\omega = \sqrt{-1} (N_{\beta\bar{\gamma}}^\alpha \overline{\theta^\alpha} \wedge \overline{\theta^\beta} \wedge \overline{\theta^\gamma} - \overline{N_{\beta\bar{\gamma}}^\alpha} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta \wedge \theta^\gamma + T_{\beta\gamma}^\alpha \overline{\theta^\alpha} \wedge \theta^\beta \wedge \theta^\gamma - \overline{T_{\beta\gamma}^\alpha} \theta^\alpha \wedge \overline{\theta^\beta} \wedge \overline{\theta^\gamma}). \quad (2.18)$$

因而得到了下述引理.

引理 2.2 (参见文献 [5, 引理 2.4]) 近 Hermite 流形 (M, g, J) 是近 Kähler 的充分必要条件是

$$T_{\beta\gamma}^\alpha = 0, \quad N_{\beta\bar{\gamma}}^\alpha + N_{\gamma\bar{\alpha}}^\beta + N_{\alpha\bar{\beta}}^\gamma = 0; \quad (2.19)$$

是拟 Kähler 的充分必要条件是

$$T_{\beta\gamma}^\alpha = 0. \quad (2.20)$$

记 Ψ 是 (M, g, J) 上 Chern 联络 ∇ 的曲率形式, 定义分量 $K_{\beta\gamma\eta}^\alpha$ 、 $K_{\beta\gamma\bar{\eta}}^\alpha$ 和 $R_{\beta\gamma\bar{\eta}}^\alpha$ 如下:

$$\begin{aligned} (\Psi_\beta^\alpha)^{2,0} &= K_{\beta\gamma\eta}^\alpha \theta^\gamma \wedge \theta^\eta, \\ (\Psi_\beta^\alpha)^{0,2} &= K_{\beta\gamma\bar{\eta}}^\alpha \overline{\theta^\gamma} \wedge \overline{\theta^\eta}, \\ (\Psi_\beta^\alpha)^{1,1} &= R_{\beta\gamma\bar{\eta}}^\alpha \theta^\gamma \wedge \overline{\theta^\eta}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

这里 $K_{\beta\gamma\eta}^\alpha = -K_{\beta\eta\gamma}^\alpha$, $K_{\beta\gamma\bar{\eta}}^\alpha = -K_{\beta\bar{\eta}\gamma}^\alpha$, $K_{\beta\gamma\eta}^\alpha = \overline{K_{\alpha\bar{\eta}\gamma}^\beta}$, $R_{\beta\gamma\bar{\eta}}^\alpha = \overline{R_{\alpha\bar{\eta}\gamma}^\beta}$. 由 Bianchi 恒等式可得如下引理.

引理 2.3 (参见文献 [5, 第 2.3 小节]) 假设 (M, g, J) 是拟 Kähler 的, 则有

$$4N_{\zeta\bar{\eta}}^\alpha \overline{N_{\beta\bar{\gamma}}^\zeta} = R_{\beta\gamma\bar{\eta}}^\alpha - R_{\gamma\beta\bar{\eta}}^\alpha, \quad (2.22)$$

$$N_{\gamma\bar{\eta},\beta}^\alpha = K_{\beta\gamma\bar{\eta}}^\alpha, \quad (2.23)$$

这里 $N_{\gamma\bar{\eta},\beta}^\alpha$ 和 $N_{\gamma\bar{\eta},\bar{\beta}}^\alpha$ 定义如下:

$$dN_{\gamma\bar{\eta}}^\alpha + N_{\gamma\bar{\eta}}^\beta \theta_\beta^\alpha - N_{\beta\bar{\eta}}^\alpha \overline{\theta_\gamma^\beta} - N_{\gamma\bar{\eta}}^\alpha \overline{\theta_\beta^\gamma} = N_{\gamma\bar{\eta},\beta}^\alpha \theta^\beta + N_{\gamma\bar{\eta},\bar{\beta}}^\alpha \overline{\theta^\beta}. \quad (2.24)$$

设 f 为定义于 M 上的函数, 定义 f_α 和 $f_{\bar{\alpha}}$ 如下:

$$\begin{aligned} df &= df(e_\alpha) \theta^\alpha + df(\overline{e_\alpha}) \overline{\theta^\alpha} \\ &= f_\alpha \theta^\alpha + f_{\bar{\alpha}} \overline{\theta^\alpha} \\ &= \partial f + \bar{\partial} f, \end{aligned} \quad (2.25)$$

这里 ∂f 和 $\bar{\partial} f$ 分别是 df 的 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 分量. 定义 $\partial : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p+1,q}(M)$ 和 $\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(M)$ 如下:

$$\partial\mu = (d\mu)^{p+1,q}, \quad \bar{\partial}\mu = (d\mu)^{p,q+1}, \quad (2.26)$$

这里 $\mu \in \Omega^{p,q}(M)$. 对 (2.25) 两边外微分并利用第一结构方程可得

$$0 = d(\partial f) + d(\bar{\partial} f) = (df_\alpha - f_\beta \theta_\alpha^\beta) \wedge \theta^\alpha + (df_{\bar{\alpha}} - f_{\bar{\beta}} \bar{\theta}_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}) \wedge \bar{\theta}^{\bar{\alpha}} + f_\alpha \Xi^\alpha + f_{\bar{\alpha}} \bar{\Xi}^{\bar{\alpha}}. \quad (2.27)$$

定义 $f_{\alpha\beta}$ 、 $f_{\alpha\bar{\beta}}$ 、 $f_{\bar{\alpha}\beta}$ 和 $f_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ 如下:

$$\begin{aligned} df_\alpha - f_\gamma \theta_\alpha^\gamma &= f_{\alpha\beta} \theta^\beta + f_{\alpha\bar{\beta}} \bar{\theta}^{\bar{\beta}}, \\ df_{\bar{\alpha}} - f_{\bar{\gamma}} \bar{\theta}_{\bar{\alpha}}^{\bar{\gamma}} &= f_{\bar{\alpha}\beta} \theta^\beta + f_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \bar{\theta}^{\bar{\beta}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

另一方面, 由于 $(\Xi^\alpha)^{1,1} = 0$, 则得

$$\partial\bar{\partial}f = f_{\bar{\alpha}\beta} \theta^\beta \wedge \bar{\theta}^{\bar{\alpha}}, \quad \bar{\partial}\partial f = f_{\alpha\bar{\beta}} \bar{\theta}^{\bar{\beta}} \wedge \theta^\alpha, \quad (2.29)$$

$$\partial\partial f = f_{\alpha\beta} \theta^\beta \wedge \theta^\alpha + f_\alpha (\Xi^\alpha)^{2,0}, \quad \bar{\partial}\bar{\partial}f = f_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \bar{\theta}^{\bar{\beta}} \wedge \bar{\theta}^{\bar{\alpha}} + f_{\bar{\alpha}} (\bar{\Xi}^{\bar{\alpha}})^{2,0}. \quad (2.30)$$

由 (2.27) 可得

$$\partial\bar{\partial}f = -\bar{\partial}\partial f, \quad \text{即 } f_{\bar{\alpha}\beta} = f_{\beta\bar{\alpha}}, \quad (2.31)$$

$$\partial\partial f + f_{\bar{\alpha}} (\bar{\Xi}^{\bar{\alpha}})^{0,2} = 0, \quad \bar{\partial}\bar{\partial}f + f_\alpha (\Xi^\alpha)^{0,2} = 0. \quad (2.32)$$

定义 2.5 设 (M, g, J) 是近 Hermite 流形, ∇ 为其上 Chern 联络. 复 Laplace 算子 $\tilde{\Delta}$ 定义为

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}f &= \nabla df(e_\alpha, \bar{e}_\alpha) + \nabla df(\bar{e}_\alpha, e_\alpha) = 2\nabla df(e_\alpha, \bar{e}_\alpha) \\ &= 2\nabla df(\bar{e}_\alpha, e_\alpha) = 2f_{\bar{\alpha}\alpha} = 2f_{\alpha\bar{\alpha}}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

这里 f 为定义于 M 上的函数, $\{e_1, \dots, e_m\}$ 为局部酉标架.

记通常由度量 g 的 Levi-Civita 联络所对应的 Laplace 算子为 Δ , 可得下述命题.

命题 2.1 设 (M, g, J) 是近 Hermite 流形, f 为其上一函数, 则必有

$$\tilde{\Delta}f = \Delta f + df(J\delta J). \quad (2.34)$$

证明 由 Chern 联络的定义可得

$$\begin{aligned} (\nabla_{\bar{e}_\alpha} e_\alpha - D_{\bar{e}_\alpha} e_\alpha, Z) &= +\frac{1}{4}\{(d^c\omega)^+(\bar{e}_\alpha, e_\alpha, Z) + (d^c\omega)^+(\bar{e}_\alpha, J e_\alpha, JZ)\} + \frac{1}{2}((D_{\bar{e}_\alpha} J) J e_\alpha, Z) \\ &= -\frac{1}{4}\{(d\omega)(J\bar{e}_\alpha, J e_\alpha, JZ) + (d\omega)(J\bar{e}_\alpha, e_\alpha, Z)\} + \frac{1}{2}((D_{\bar{e}_\alpha} J) J e_\alpha, Z) \\ &= \left(-\frac{1}{2}J((D_{\bar{e}_\alpha} J) e_\alpha + (D_{e_\alpha} J) \bar{e}_\alpha), Z\right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

和

$$\sum (\nabla_{\bar{e}_\alpha} e_\alpha - D_{\bar{e}_\alpha} e_\alpha) = -\frac{1}{2}J\delta J. \quad (2.36)$$

因而可得

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}f - \Delta f &= 2 \sum (\nabla df(\bar{e}_\alpha, e_\alpha) - Ddf(\bar{e}_\alpha, e_\alpha)) \\ &= -2 \sum df(\nabla_{\bar{e}_\alpha} e_\alpha - D_{\bar{e}_\alpha} e_\alpha) \\ &= df(J\delta J).\end{aligned}\quad (2.37)$$

证毕. $\square$

推论 2.1 如果 (M, g, J) 为半 Kähler, 那么上述定义的复 Laplace 算子与通常的 Laplace 算子一致.

设 $f: (M, g, J) \rightarrow (N, h)$ 为光滑映照, 这里 (N, h) 为 Riemann 流形. 张量场 $\tau(f)$ 是第二基本形式 Ddf 的迹, 也即

$$\tau(f) = \sum_{\alpha=1}^m [Ddf(x_\alpha, x_\alpha) + Ddf(Jx_\alpha, Jx_\alpha)] = \sum_{\alpha=1}^m 2[Ddf(e_\alpha, \bar{e}_\alpha)]. \quad (2.38)$$

如果 $\tau(f) = 0$, 则称 f 为调和映照. Eells 和 Sampson^[10] 证明了任何 Kähler 流形间的全纯映照必是调和的. 但通常 Hermite 流形间的全纯映照则未必是调和的.

定义 2.6^[11] 令 (M, g, J) 是近 Hermite 流形, ∇ 为 Chern 联络. 对于任何从近 Hermite 流形到 Riemann 流形的映照 $f: (M, g, J) \rightarrow (N, h)$, 定义其 Hermite 张量场 $\tau'(f)$ 如下:

$$\tau'(f) = \sum_{\alpha=1}^m (\nabla df(e_\alpha, \bar{e}_\alpha) + \nabla df(\bar{e}_\alpha, e_\alpha)), \quad (2.39)$$

这里 $\{e_1, \dots, e_m\}$ 是局部酉标架,

$$\nabla df(X, Y) = D_X^{f^{-1}TN}(df(Y)) - df(\nabla_X Y), \quad (2.40)$$

其中 X 和 Y 为向量场. 映照 $f: (M, g, J) \rightarrow (N, h)$ 被称为 Hermite 调和的, 即其满足

$$\tau'(f) = 0. \quad (2.41)$$

引理 2.4^[11] 令 $f: (M, g, J) \rightarrow (N, h)$ 为从近 Hermite 流形到 Riemann 流形的调和映照, 则必成立

$$\tau'(f) = \tau(f) + df(J\delta J). \quad (2.42)$$

特别地, 如果 (M, g, J) 是半 Kähler 的, 则任何 Hermite 调和映照必是调和的.

注 2.4 如果 (M, g, J) 是半 Kähler 的, (N, h, J^N) 是拟 Kähler 的, 则任何从 M 到 N 的 J -全纯或反全纯映照必为调和映照^[12]. 利用目标流形的 Chern 联络, 文献 [11] 类似地定义了两近 Hermite 流形间 Hermite 调和的概念. 由文献 [6, 引理 4.1] 的结果可知, 如果目标流形是拟 Kähler 的, 则 J -全纯或反全纯映照必为 Hermite 调和映照. 文献 [11] 则证明了更一般的结果, 任何近 Hermite 流形间的 J -全纯或反全纯映照必为 Hermite 调和映照. 因为 Hermite 调和映照与通常的调和映照方程仅相差一阶线性的部分, 类似于文献 [13] 中的讨论, 我们可在目标流形非正曲率的假设下证明 Hermite 调和映照的存在性. 一个有意思的问题是, 我们能否像萧荫堂讨论 Kähler 情形、Jost 和 Yau 讨论 Hermite 情形那样, 去研究出发流形为近 Hermite 流形 Hermite 调和映照的正则性定理. 在本文的后面部分我们在一类特殊情形下研究该问题.

3 一个 Bochner 型等式

令 (M, g, J) 为紧致近 Kähler 流形, (N, h, J') 为紧致 Kähler 流形, $f : M \rightarrow N$ 是光滑映照. 通过在目标流形上选取局部复坐标系 $\{z_i\}_{i=1}^n$, 在出发流形上取局部酉标架 $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^m$, 可得

$$\begin{aligned} \partial f &= f_\alpha^i \theta^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial z^i} = \partial f^i \otimes \frac{\partial}{\partial z^i}, & \partial \bar{f} &= \bar{f}_\alpha^{\bar{j}} \theta^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = \partial f^{\bar{j}} \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}, \\ \bar{\partial} f &= f_\alpha^i \bar{\theta}^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial z^i} = \bar{\partial} f^i \otimes \frac{\partial}{\partial z^i}, & \bar{\partial} \bar{f} &= \bar{f}_\alpha^{\bar{j}} \bar{\theta}^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = \bar{\partial} f^{\bar{j}} \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

对于 $(T^C M)^* \otimes f^* T^C(N)$ 上的一个截面 Ω , 应用拉回联络 $f^* D$ (D 记为 TN 上的 Levi-Civita 联络) 我们可得诱导联络 $D\Omega$. 我们得

$$\begin{aligned} D\bar{\partial} f &= D \left(f_\alpha^i \bar{\theta}^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial z^i} \right) \\ &= \partial \bar{\partial} f^i \otimes \frac{\partial}{\partial z^i} + \bar{\partial} \partial f^i \otimes \frac{\partial}{\partial z^i} + f_\alpha^i \bar{\Xi}^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial z^i} \\ &\quad + \Gamma_{jk}^i \partial f^j \wedge \bar{\partial} f^k \otimes \frac{\partial}{\partial z^i} + \Gamma_{jk}^i \bar{\partial} f^j \wedge \partial f^k \otimes \frac{\partial}{\partial z^i}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$D'\bar{\partial} f = (\partial \bar{\partial} f^i + \Gamma_{jk}^i \partial f^j \wedge \bar{\partial} f^k) \otimes \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad (3.3)$$

$$D''\bar{\partial} f = (\bar{\partial} \partial f^i + \Gamma_{jk}^i \bar{\partial} f^j \wedge \partial f^k) \otimes \frac{\partial}{\partial z^i}.$$

特别地,

$$\begin{aligned} D'\bar{\partial} f^i &= \partial \bar{\partial} f^i + \Gamma_{jk}^i \partial f^j \wedge \bar{\partial} f^k, \\ D''\bar{\partial} f^i &= \bar{\partial} \partial f^i + \Gamma_{jk}^i \bar{\partial} f^j \wedge \partial f^k. \end{aligned} \quad (3.4)$$

类似地,

$$\begin{aligned} D'\partial f^{\bar{i}} &= \partial \partial f^{\bar{i}} + \bar{\Gamma}_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{i}} \partial f^{\bar{j}} \wedge \partial f^{\bar{k}}, \\ D''\partial f^{\bar{i}} &= \bar{\partial} \partial f^{\bar{i}} + \bar{\Gamma}_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{i}} \bar{\partial} f^{\bar{j}} \wedge \partial f^{\bar{k}}, \\ D''\bar{\partial} f^{\bar{i}} &= \bar{\partial} \bar{\partial} f^{\bar{i}} + \bar{\Gamma}_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{i}} \bar{\partial} f^{\bar{j}} \wedge \bar{\partial} f^{\bar{k}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

我们将对一般的光滑映照 $f : M \rightarrow N$ 运用萧荫堂的方法导出下述 Bochner 型恒等式. 设

$$\varphi = \sqrt{-1} h_{i\bar{j}} f_\gamma^i f_\delta^{\bar{j}} N_{\delta\alpha}^\gamma \bar{\theta}^\alpha \in \Omega^{0,1}(M), \quad (3.6)$$

$$\bar{\varphi} = -\sqrt{-1} h_{i\bar{j}} f_\delta^i f_\gamma^{\bar{j}} \bar{N}_{\delta\alpha}^\gamma \theta^\alpha \in \Omega^{1,0}(M). \quad (3.7)$$

引理 3.1 (Bochner 型恒等式) 令 $f : M \rightarrow N$ 是光滑映照, (M, g, J) 是紧致近 Kähler 流形, (N, h, J') 为紧致 Kähler 流形, 则成立

$$\begin{aligned} & d(\bar{\partial}(h_{i\bar{j}} \bar{\partial} f^i \wedge \partial f^{\bar{j}}) - \partial(h_{i\bar{j}} \bar{\partial} f^i \wedge \partial f^{\bar{j}})) \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} - 4d(\varphi + \bar{\varphi}) \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= 2R_{i\bar{j}k\bar{l}} \bar{\partial} f^i \wedge \partial f^{\bar{j}} \wedge \partial f^k \wedge \bar{\partial} f^{\bar{l}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} - 2h_{i\bar{j}} D'\bar{\partial} f^i \wedge D''\partial f^{\bar{j}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\quad - 2h_{i\bar{j}} D''\bar{\partial} f^i \wedge D'\partial f^{\bar{j}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} - 2h_{i\bar{j}} D'\partial f^i \wedge D''\bar{\partial} f^{\bar{j}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

证明 任取一点 $x \in M$, 在 $f(x)$ 的邻域上取一全纯法坐标系使得 $h_{i\bar{j}}$ 的一阶导数在 $f(x)$ 点消失. 直接计算可得

$$\begin{aligned}
 & d(\bar{\partial}(h_{i\bar{j}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial f^{\bar{j}}) - \partial(h_{i\bar{j}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial f^{\bar{j}})) \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\
 &= 2R_{i\bar{j}k\bar{l}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial f^{\bar{j}} \wedge \partial f^k \wedge \bar{\partial}f^{\bar{l}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\
 &\quad - 2h_{i\bar{j}}\partial\bar{\partial}f^i \wedge \bar{\partial}\partial f^{\bar{j}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} + 2h_{i\bar{j}}\bar{\partial}\bar{\partial}f^i \wedge \partial\partial f^{\bar{j}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\
 &\quad + h_{i\bar{j}}d(\bar{\partial}\bar{\partial}f^i) \wedge \partial f^{\bar{j}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} - h_{i\bar{j}}d(\partial\bar{\partial}f^i) \wedge \partial f^{\bar{j}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\
 &\quad + h_{i\bar{j}}\bar{\partial}f^i \wedge d(\bar{\partial}\partial f^{\bar{j}}) \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} - h_{i\bar{j}}\bar{\partial}f^i \wedge d(\partial\partial f^{\bar{j}}) \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}. \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

在下面的计算中, 我们将在 $x \in M$ 的一邻域上取局部酉标架 $\{e_1, \dots, e_m\}$. 由于 (M, g, J) 是近 Kähler 的, 可得

$$\bar{\partial}\bar{\partial}f^i = f_{\alpha\bar{\beta}}^i \bar{\theta}^\beta \wedge \bar{\theta}^\alpha = -f_\gamma^i (\Xi^\gamma)^{(0,2)} = -f_\gamma^i \Xi^\gamma, \tag{3.10}$$

$$\partial\partial f^{\bar{j}} = f_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{j}} \theta^\beta \wedge \theta^\alpha = -f_{\bar{\gamma}}^{\bar{j}} (\Xi^\gamma)^{(0,2)} = -f_{\bar{\gamma}}^{\bar{j}} \Xi^\gamma. \tag{3.11}$$

进一步可得

$$\begin{aligned}
 d(\bar{\partial}\bar{\partial}f^i) &= -d(f_\gamma^i \Xi^\gamma) = -df_\gamma^i \wedge \Xi^\gamma - f_\gamma^i d\Xi^\gamma \\
 &= -(f_\beta^i \theta_\gamma^\beta + f_{\gamma\bar{\beta}}^i \theta^\beta + f_{\gamma\bar{\beta}}^i \bar{\theta}^\beta) \wedge \Xi^\gamma - f_\gamma^i (\Psi_\beta^\gamma \wedge \theta^\beta - \theta_\beta^\gamma \wedge \Xi^\beta) \\
 &= -(f_{\gamma\bar{\beta}}^i \theta^\beta + f_{\gamma\bar{\beta}}^i \bar{\theta}^\beta) \wedge \Xi^\gamma - f_\gamma^i \Psi_\beta^\gamma \wedge \theta^\beta, \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

$$d(\partial\partial f^{\bar{j}}) = -d(f_{\bar{\gamma}}^{\bar{j}} \Xi^\gamma) = -(f_{\bar{\gamma}\beta}^{\bar{j}} \theta^\beta + f_{\bar{\gamma}\beta}^{\bar{j}} \bar{\theta}^\beta) \wedge \Xi^\gamma - f_{\bar{\gamma}}^{\bar{j}} \bar{\Psi}_\beta^\gamma \wedge \bar{\theta}^\beta, \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
 d(\bar{\partial}\partial f^{\bar{j}}) &= d(d\bar{\partial}f^{\bar{j}} - \partial\partial f^{\bar{j}} - f_{\alpha}^{\bar{j}} \Xi^\alpha) \\
 &= -d(-f_{\alpha}^{\bar{j}} \Xi^\alpha + f_{\alpha}^{\bar{j}} \Xi^\alpha) \\
 &= (f_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{j}} \theta^\beta + f_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{j}} \bar{\theta}^\beta) \wedge \Xi^\alpha + f_{\alpha}^{\bar{j}} \bar{\Psi}_\beta^\alpha \wedge \bar{\theta}^\beta \\
 &\quad - (f_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{j}} \theta^\beta + f_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{j}} \bar{\theta}^\beta) \wedge \Xi^\alpha - f_{\alpha}^{\bar{j}} \Psi_\beta^\alpha \wedge \theta^\beta, \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d(\partial\bar{\partial}f^i) &= -d(\bar{\partial}\partial f^i) = d(\partial\bar{\partial}f^i + f_{\alpha}^i \Xi^\alpha) \\
 &= -(f_{\alpha\bar{\beta}}^i \theta^\beta + f_{\alpha\bar{\beta}}^i \bar{\theta}^\beta) \wedge \Xi^\alpha - f_{\alpha}^i \bar{\Psi}_\beta^\alpha \wedge \bar{\theta}^\beta \\
 &\quad + (f_{\alpha\bar{\beta}}^i \theta^\beta + f_{\alpha\bar{\beta}}^i \bar{\theta}^\beta) \wedge \Xi^\alpha + f_{\alpha}^i \Psi_\beta^\alpha \wedge \theta^\beta. \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

另一方面, 利用引理 2.3, 可得

$$\begin{aligned}
 (f_{\alpha\bar{\beta}} - f_{\beta\bar{\alpha}})\theta^\beta \wedge \Xi^\alpha &= f_{\alpha}^{\bar{\gamma}} (\bar{\Psi}_\beta^\alpha)^{1,1} \wedge \bar{\theta}^\beta, \\
 (f_{\alpha\bar{\beta}} - f_{\beta\bar{\alpha}})\bar{\theta}^\beta \wedge \Xi^\alpha &= f_{\alpha}^{\bar{\gamma}} (\bar{\Psi}_\beta^\alpha)^{1,1} \wedge \theta^\beta, \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

这里 f 是 M 上的函数. 由此可得

$$\{d(\bar{\partial}\partial f^{\bar{j}})\}^{2,1} = f_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{j}} \bar{\theta}^\beta \wedge \Xi^\alpha + f_{\alpha}^{\bar{j}} (\bar{\Psi}_\beta^\alpha)^{0,2} \wedge \bar{\theta}^\beta - f_{\alpha}^{\bar{j}} (\bar{\Psi}_\beta^\alpha)^{1,1} \wedge \theta^\beta$$

$$= f_{\beta\alpha}^{\bar{j}} \bar{\theta}^{\beta} \wedge \bar{\Xi}^{\alpha} + f_{\alpha}^{\bar{j}} (\Psi_{\beta}^{\alpha})^{0,2} \wedge \bar{\theta}^{\beta}, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \{d(\bar{\partial}\bar{\partial}f^i)\}^{1,2} &= -f_{\alpha}^i \overline{(\Psi_{\beta}^{\alpha})^{1,1}} \wedge \bar{\theta}^{\beta} + f_{\alpha\beta}^i \theta^{\beta} \wedge \bar{\Xi}^{\alpha} + f_{\alpha}^i (\Psi_{\beta}^{\alpha})^{0,2} \wedge \theta^{\beta} \\ &= f_{\beta\alpha}^i \theta^{\beta} \wedge \bar{\Xi}^{\alpha} + f_{\alpha}^i (\Psi_{\beta}^{\alpha})^{0,2} \wedge \theta^{\beta}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\{d(\bar{\partial}\bar{\partial}f^{\bar{j}})\}^{1,2} = -f_{\alpha\beta}^{\bar{j}} \theta^{\beta} \wedge \bar{\Xi}^{\alpha} - f_{\alpha}^{\bar{j}} (\Psi_{\beta}^{\alpha})^{0,2} \wedge \theta^{\beta}, \quad (3.19)$$

$$\{d(\partial\partial f^{\bar{j}})\}^{2,1} = -f_{\alpha\beta}^{\bar{j}} \bar{\theta}^{\beta} \wedge \bar{\Xi}^{\alpha} - f_{\alpha}^{\bar{j}} \overline{(\Psi_{\beta}^{\alpha})^{0,2}} \wedge \bar{\theta}^{\beta}. \quad (3.20)$$

根据上述等式, 可导出

$$\begin{aligned} & d(\bar{\partial}(h_{i\bar{j}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial f^{\bar{j}}) - \partial(h_{i\bar{j}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial f^{\bar{j}})) \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ &= 2R_{i\bar{j}k\bar{l}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial f^{\bar{j}} \wedge \partial f^k \wedge \bar{\partial}f^{\bar{l}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ &+ 2h_{i\bar{j}} \sum_{\alpha \neq \beta} (f_{\alpha\beta}^i f_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{j}} - f_{\alpha\alpha}^i f_{\beta\bar{\beta}}^{\bar{j}}) + 2h_{i\bar{j}} \sum_{\alpha \neq \beta} f_{\alpha\bar{\beta}}^i (f_{\alpha\beta}^{\bar{j}} - f_{\beta\alpha}^{\bar{j}}) \\ &+ 2h_{i\bar{j}} \sum_{\alpha \neq \beta} N_{\beta\bar{\alpha}}^{\gamma} f_{\beta}^{\bar{j}} (f_{\alpha\gamma}^i + f_{\gamma\alpha}^i) + 4h_{i\bar{j}} \sum_{\alpha \neq \beta} K_{\alpha\bar{\beta}\alpha}^{\gamma} f_{\gamma}^i f_{\beta}^{\bar{j}} \\ &+ 2h_{i\bar{j}} \sum_{\alpha \neq \beta} \overline{N_{\beta\bar{\alpha}}^{\gamma}} f_{\beta}^i (f_{\alpha\gamma}^{\bar{j}} + f_{\gamma\alpha}^{\bar{j}}) + 4h_{i\bar{j}} \sum_{\alpha \neq \beta} \overline{K_{\alpha\bar{\beta}\alpha}^{\gamma}} f_{\beta}^{\bar{j}} f_{\gamma}^{\bar{i}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

通过直接计算可得

$$\begin{aligned} d\varphi \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} &= d(\sqrt{-1}h_{i\bar{j}}f_{\gamma}^i f_{\delta}^{\bar{j}} N_{\delta\bar{\alpha}}^{\gamma} \bar{\theta}^{\alpha}) \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sqrt{-1}h_{i\bar{j}}d(f_{\gamma}^i) f_{\delta}^{\bar{j}} N_{\delta\bar{\alpha}}^{\gamma} \bar{\theta}^{\alpha} \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} + \sqrt{-1}h_{i\bar{j}}f_{\gamma}^i d(f_{\delta}^{\bar{j}}) N_{\delta\bar{\alpha}}^{\gamma} \bar{\theta}^{\alpha} \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \\ &+ \sqrt{-1}h_{i\bar{j}}f_{\gamma}^i f_{\delta}^{\bar{j}} dN_{\delta\bar{\alpha}}^{\gamma} \bar{\theta}^{\alpha} \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} + \sqrt{-1}h_{i\bar{j}}f_{\gamma}^i f_{\delta}^{\bar{j}} N_{\delta\bar{\alpha}}^{\gamma} d\bar{\theta}^{\alpha} \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sqrt{-1}h_{i\bar{j}}\{f_{\delta}^{\bar{j}} N_{\delta\bar{\alpha}}^{\gamma} (f_{\beta}^i \theta_{\gamma}^{\beta} + f_{\gamma\beta}^i \theta^{\beta} + f_{\gamma\bar{\beta}}^i \bar{\theta}^{\beta}) \wedge \bar{\theta}^{\alpha} \\ &+ f_{\gamma}^i N_{\delta\bar{\alpha}}^{\gamma} (f_{\beta}^{\bar{j}} \theta_{\delta}^{\beta} + f_{\delta\beta}^{\bar{j}} \theta^{\beta} + f_{\delta\bar{\beta}}^{\bar{j}} \bar{\theta}^{\beta}) \wedge \bar{\theta}^{\alpha} \\ &+ f_{\gamma}^i f_{\delta}^{\bar{j}} (-N_{\delta\bar{\alpha}}^{\beta} \theta_{\beta}^{\gamma} + N_{\beta\bar{\alpha}}^{\gamma} \theta_{\delta}^{\beta} + N_{\delta\bar{\beta}}^{\gamma} \theta_{\alpha}^{\beta} + N_{\delta\bar{\alpha},\beta}^{\gamma} \theta_{\beta} + N_{\delta\bar{\alpha},\bar{\beta}}^{\gamma} \bar{\theta}_{\beta}) \wedge \bar{\theta}^{\alpha} \\ &+ f_{\gamma}^i f_{\delta}^{\bar{j}} N_{\delta\bar{\alpha}}^{\gamma} (-\bar{\theta}_{\beta}^{\alpha} \wedge \bar{\theta}^{\beta} + \bar{\Xi}^{\alpha})\} \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= h_{i\bar{j}}f_{\gamma\alpha}^i f_{\beta}^{\bar{j}} N_{\beta\bar{\alpha}}^{\gamma} + h_{i\bar{j}}f_{\gamma}^i f_{\beta\alpha}^{\bar{j}} N_{\beta\bar{\alpha}}^{\gamma} + h_{i\bar{j}}f_{\gamma}^i f_{\beta}^{\bar{j}} N_{\beta\bar{\alpha},\alpha}^{\gamma}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

类似地,

$$d(\bar{\varphi}) \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} = h_{i\bar{j}}f_{\beta}^i f_{\gamma\alpha}^{\bar{j}} \overline{N_{\beta\bar{\alpha}}^{\gamma}} + h_{i\bar{j}}f_{\beta\alpha}^i f_{\gamma}^{\bar{j}} \overline{N_{\beta\bar{\alpha}}^{\gamma}} + h_{i\bar{j}}f_{\beta}^i f_{\gamma}^{\bar{j}} \overline{N_{\beta\bar{\alpha},\alpha}^{\gamma}}. \quad (3.23)$$

这里用到性质: $\bar{\theta}_{\alpha}^{\beta} = -\theta_{\beta}^{\alpha}$ 和 $(\Xi^{\alpha})^{1,1} = 0$. 由于 (M, g, J) 是近 Kähler 的, 因此有

$$\begin{aligned} N_{\beta\bar{\alpha}}^{\gamma} \overline{N_{\gamma\alpha}^{\delta}} + N_{\gamma\alpha}^{\beta} \overline{N_{\delta\bar{\alpha}}^{\gamma}} &= (-N_{\alpha\gamma}^{\beta} - N_{\gamma\bar{\beta}}^{\alpha}) \overline{N_{\gamma\alpha}^{\delta}} + N_{\gamma\alpha}^{\beta} (-\overline{N_{\alpha\gamma}^{\delta}} - \overline{N_{\gamma\bar{\delta}}^{\alpha}}) \\ &= 2N_{\gamma\alpha}^{\beta} \overline{N_{\gamma\alpha}^{\delta}} - N_{\gamma\bar{\beta}}^{\alpha} \overline{N_{\gamma\alpha}^{\delta}} - N_{\gamma\alpha}^{\beta} \overline{N_{\gamma\bar{\delta}}^{\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

由上述等式可导出

$$N_{\beta\bar{\alpha}}^{\gamma}\overline{N_{\gamma\bar{\alpha}}^{\delta}} + N_{\gamma\bar{\alpha}}^{\beta}\overline{N_{\delta\bar{\alpha}}^{\gamma}} = N_{\gamma\bar{\alpha}}^{\beta}\overline{N_{\gamma\bar{\alpha}}^{\delta}}. \quad (3.25)$$

根据 (2.23) ($N_{\beta\bar{\alpha},\alpha}^{\gamma} = K_{\alpha\bar{\beta}\bar{\alpha}}^{\gamma}$) 可得

$$\begin{aligned} & d(\bar{\partial}(h_{i\bar{j}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial f^{\bar{j}}) - \partial(h_{i\bar{j}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial f^{\bar{j}})) \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} - 4d(\varphi + \bar{\varphi}) \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= 2R_{i\bar{j}k\bar{l}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial f^{\bar{j}} \wedge \partial f^k \wedge \bar{\partial}f^{\bar{l}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ &+ 2h_{i\bar{j}} \sum_{\alpha \neq \beta} (f_{\alpha\beta}^i f_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{j}} - f_{\alpha\alpha}^i f_{\beta\bar{\beta}}^{\bar{j}}) + 2h_{i\bar{j}} \sum_{\alpha \neq \beta} f_{\alpha\bar{\beta}}^i (f_{\alpha\beta}^{\bar{j}} - f_{\beta\alpha}^{\bar{j}}) \\ &- 4h_{i\bar{j}} f_{\beta\bar{\alpha}}^i f_{\gamma\bar{\beta}}^{\bar{j}} \overline{N_{\beta\bar{\alpha}}^{\gamma}} - 4h_{i\bar{j}} f_{\gamma}^i f_{\beta\alpha}^{\bar{j}} \overline{N_{\beta\bar{\alpha}}^{\gamma}} \\ &+ 2h_{i\bar{j}} \sum_{\alpha \neq \beta} N_{\beta\bar{\alpha}}^{\gamma} f_{\beta}^{\bar{j}} (f_{\alpha\gamma}^i - f_{\gamma\alpha}^i) + 2h_{i\bar{j}} \sum_{\alpha \neq \beta} \overline{N_{\beta\bar{\alpha}}^{\gamma}} f_{\beta}^{\bar{j}} (f_{\alpha\gamma}^{\bar{i}} - f_{\gamma\alpha}^{\bar{i}}) \\ &= 2R_{i\bar{j}k\bar{l}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial f^{\bar{j}} \wedge \partial f^k \wedge \bar{\partial}f^{\bar{l}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ &+ 2h_{i\bar{j}} \sum_{\alpha \neq \beta} (f_{\alpha\beta}^i f_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{j}} - f_{\alpha\alpha}^i f_{\beta\bar{\beta}}^{\bar{j}}) - 2h_{i\bar{j}} \sum_{\alpha \neq \beta} f_{\alpha\bar{\beta}}^i (f_{\alpha\beta}^{\bar{j}} - f_{\beta\alpha}^{\bar{j}}) \\ &- 4h_{i\bar{j}} f_{\delta}^i f_{\beta}^{\bar{j}} (\overline{N_{\beta\bar{\alpha}}^{\gamma}} \overline{N_{\gamma\bar{\alpha}}^{\delta}} + N_{\gamma\bar{\alpha}}^{\beta} \overline{N_{\delta\bar{\alpha}}^{\gamma}}) \\ &= 2R_{i\bar{j}k\bar{l}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial f^{\bar{j}} \wedge \partial f^k \wedge \bar{\partial}f^{\bar{l}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ &+ 2h_{i\bar{j}} \sum_{\alpha \neq \beta} (f_{\alpha\beta}^i f_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{j}} - f_{\alpha\alpha}^i f_{\beta\bar{\beta}}^{\bar{j}}) - h_{i\bar{j}} (f_{\alpha\bar{\beta}}^i - f_{\beta\bar{\alpha}}^i) (f_{\alpha\beta}^{\bar{j}} - f_{\beta\alpha}^{\bar{j}}) \\ &- h_{i\bar{j}} (f_{\alpha\beta}^i - f_{\beta\alpha}^i) (f_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{j}} - f_{\beta\bar{\alpha}}^{\bar{j}}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

至此我们完成了引理 3.1 的证明. $\square$

上述 Bochner 恒等式中右侧的最后两项可表达如下:

$$\begin{aligned} -2h_{i\bar{j}} D'' \bar{\partial} f^i \wedge D' \partial f^{\bar{j}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} &= -(f_{\alpha\beta}^i - f_{\beta\alpha}^i) (f_{\alpha\beta}^{\bar{j}} - f_{\beta\alpha}^{\bar{j}}) \\ &= -4f_{\delta}^i N_{\alpha\bar{\beta}}^{\delta} f_{\gamma}^{\bar{i}} \overline{N_{\alpha\bar{\beta}}^{\gamma}} \\ &= -4h \left(df^i (N_{\alpha\bar{\beta}}^{\delta} e_{\delta}) \frac{\partial}{\partial z^i}, df^{\bar{j}} (\overline{N_{\alpha\bar{\beta}}^{\gamma}} e_{\gamma}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} \right) \\ &= 2(R_{\gamma\beta\bar{\beta}}^{\delta} - R_{\beta\gamma\bar{\beta}}^{\delta}) f_{\delta}^i f_{\gamma}^{\bar{i}}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} -2h_{i\bar{j}} D' \partial f^i \wedge D'' \bar{\partial} f^{\bar{j}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} &= -(f_{\alpha\beta}^i - f_{\beta\alpha}^i) (f_{\alpha\bar{\beta}}^{\bar{j}} - f_{\beta\bar{\alpha}}^{\bar{j}}) \\ &= -4f_{\delta}^i \overline{N_{\alpha\bar{\beta}}^{\delta}} f_{\gamma}^{\bar{i}} \overline{N_{\alpha\bar{\beta}}^{\gamma}} \\ &= -4h \left(df^i (\overline{N_{\alpha\bar{\beta}}^{\delta}} e_{\delta}) \frac{\partial}{\partial z^i}, df^{\bar{j}} (N_{\alpha\bar{\beta}}^{\gamma} e_{\gamma}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} \right) \\ &= 2(R_{\delta\beta\bar{\beta}}^{\gamma} - R_{\beta\delta\bar{\beta}}^{\gamma}) f_{\delta}^i f_{\gamma}^{\bar{i}}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

根据 (M, g, J) 是近 Kähler 的, 可验证

$$[\overline{e_{\alpha}}, \overline{e_{\beta}}] - \nabla_{\overline{e_{\alpha}}} \overline{e_{\beta}} + \nabla_{\overline{e_{\beta}}} \overline{e_{\alpha}} = -2N_{\alpha\bar{\beta}}^{\gamma} e_{\gamma} = -N(\overline{e_{\alpha}}, \overline{e_{\beta}}), \quad (3.29)$$

由此可得

$$\begin{aligned}
 & -2h_{i\bar{j}}D'\partial f^i \wedge D''\bar{\partial}f^{\bar{j}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} - 2h_{i\bar{j}}D''\bar{\partial}f^i \wedge D'\partial f^{\bar{j}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\
 & = -4 \sum_{\alpha, \beta} h(df(N_{\alpha\bar{\beta}}^\delta e_\delta), df(\overline{N_{\alpha\bar{\beta}}^\gamma e_\gamma})) \\
 & = -4 \sum_{\alpha, \beta} |df(N(\bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta))|^2.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

4 调和映照的复解析性

定义 4.1 ^[1] 令 (N, h, J^N) 是 Kähler 流形. 其曲率张量 $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ 称为是强负的, 即其满足

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}}(A^i\bar{B}^{\bar{j}} - C^i\bar{D}^{\bar{j}})(\overline{A^l\bar{B}^{\bar{k}} - C^l\bar{D}^{\bar{k}}}) > 0, \tag{4.1}$$

这里 $A^i, B^i, C^i, D^i \in C$, 至少有一 (i, j) 使得 $A^i\bar{B}^{\bar{j}} - C^i\bar{D}^{\bar{j}} \neq 0$.

令 (M, g, J) 是紧致近 Kähler 流形, (N, h, J^N) 是紧致 Kähler 流形具强负曲率张量, $f: M \rightarrow N$ 为光滑映照. 容易验证

$$2R_{i\bar{j}k\bar{l}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial f^{\bar{j}} \wedge \partial f^k \wedge \bar{\partial}f^{\bar{l}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} = 8R_{i\bar{j}k\bar{l}}(f_\alpha^i\bar{f}_\beta^{\bar{j}} - f_\beta^i\bar{f}_\alpha^{\bar{j}})(\overline{f_\alpha^l\bar{f}_\beta^{\bar{k}} - f_\beta^l\bar{f}_\alpha^{\bar{k}}})\frac{\omega^n}{n!} = b\frac{\omega^n}{n!}, \tag{4.2}$$

$$-2h_{i\bar{j}}D'\bar{\partial}f^i \wedge D''\partial f^{\bar{j}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} = 2|D'\bar{\partial}f|^2\frac{\omega^n}{n!}, \tag{4.3}$$

这里 b 是 M 上的非负函数.

定义 4.2 令 $f: M \rightarrow N$ 是两近 Hermite 流形 (M, g, J) 和 (N, h, J^N) 的光滑映照. f 被称为全纯的当且仅当 $J^N \circ df = df \circ J$; f 被称为反全纯的当且仅当 $J^N \circ df = -df \circ J$. 称 f 是 $\pm$ -全纯, 即如果它是全纯或反全纯的.

下面来证明定理 1.2. 假设 $f: M \rightarrow N$ 是 $\pm$ -全纯的, 则有

$$df(N(X, Y)) = N^*(df(X), df(Y)), \tag{4.4}$$

这里 N^* 是 N 的 Nijenhuis 张量. 由于 (N, h, J^N) 是 Kähler 的, 则显然对于任何 M 上的切向量场 X 和 Y , 必成立

$$df(N(X, Y)) = 0. \tag{4.5}$$

如果 $f: M \rightarrow N$ 是调和映照并且满足 (4.5), 从 Bochner 型恒等式 (3.8)、(3.29)、(3.30)、(4.2) 和 (4.3) 可得

$$\begin{aligned}
 & d(\bar{\partial}(h_{i\bar{j}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial f^{\bar{j}}) - \partial(h_{i\bar{j}}\bar{\partial}f^i \wedge \partial f^{\bar{j}})) \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} - 4d(\varphi + \bar{\varphi}) \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \\
 & = b\frac{\omega^n}{n!} + 2|D'\bar{\partial}f|^2\frac{\omega^n}{n!}.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

因为 (M, g, J) 是近 Kähler, 所以, 上式左边是一恰当形式. 另外流形 M 是紧致无边, 对上式两边积分可得

$$\int_M b\frac{\omega^n}{n!} + 2|D'\bar{\partial}f|^2\frac{\omega^n}{n!} = 0. \tag{4.7}$$

与文献 [1] 中的相同讨论, 可得下述命题.

命题 4.1 令 (M, g, J) 是紧致近 Kähler 流形, (N, h, J') 是紧致 Kähler 流形并具强负曲率. 假设 $f: M \rightarrow N$ 是调和映照并且在某点处的秩至少为 3. 如果 f 满足对于任何 $X, Y \in TM$ 均成立 $df(N(X, Y)) = 0$, 则其必是 $\pm$ -全纯的.

证明 在出发流形 M 取局部酉基 $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^m$, 在目标流形 N 上取局部复坐标系, 由 (4.7) 可得

$$f_{\beta\alpha}^i + \Gamma_{jk}^i f_\alpha^j f_\beta^k = 0, \quad (4.8)$$

$$f_{\alpha\bar{\beta}}^i f_\beta^j - f_{\beta\bar{\alpha}}^i f_\alpha^j = 0, \quad (4.9)$$

这里 i, j, α 和 β 是任意的.

由秩的下半连续性可知, 必在一邻域 $U \subset M$ 上成立 $\text{rank}_R df \geq 3$. 令 $p \in U$, 如果对于某对 i 和 j 成立 $\partial f^i(p) \neq 0, \bar{\partial} f^j(p) \neq 0$, 则由 (4.9) 可知, 对于每个 $k, \bar{\partial} f^k(p)$ 和 $\bar{\partial} f^i$ 在复系数下是线性相关的, 对于每个 $l, \bar{\partial} f^l$ 和 $\bar{\partial} f^j(p)$ 在复系数下是线性相关的. 因而, $df(p)$ 秩 (实系数下) 最多为 2, 这与 $p \in U$ 矛盾. 因此, 对于每点 $p \in U$, 要么 $\partial f(p) = 0$, 要么 $\bar{\partial} f(p) = 0$. 由于在 U 上 $\text{rank}_R df > 0$, ∂f 和 $\bar{\partial} f$ 不能同时成立, 因此, U 必与 $\{p \in U : \partial f(p) = 0\}$ 或 $\{p \in U : \bar{\partial} f(p) = 0\}$ 之一重合, 也即在 U 要么 $\partial f \equiv 0$, 要么 $\bar{\partial} f \equiv 0$. 不妨设在 U 上 $\bar{\partial} f \equiv 0$. 令 U' 是 M 中包含 U 的使得 $\bar{\partial} f \equiv 0$ 的最大的集. 如果 $U' \neq M$, 则必有 $p \in \partial U'$. 设 V 是 p 的连通开邻域, 并且充分小使得 V 上有局部酉标架, 其像 $f(V)$ 可被一局部复坐标系覆盖. 对 (4.8) 做外微分可得

$$\begin{aligned} 0 &= d(f_{\gamma\alpha}^i + \Gamma_{jk}^i f_\alpha^j f_\gamma^k)(\bar{e}_\alpha) \\ &= f_{\gamma\alpha, \bar{\alpha}}^i + f_{\beta\alpha}^i \bar{\theta}_\gamma^\beta(\bar{e}_\alpha) + f_{\gamma\beta}^i \theta_\alpha^\beta(\bar{e}_\alpha) + d\Gamma_{jk}^i(\bar{e}_\alpha) f_\alpha^j f_\gamma^k \\ &\quad + \Gamma_{jk}^i (f_\beta^j \theta_\alpha^\beta(\bar{e}_\alpha) + f_{\alpha\bar{\alpha}}^j) f_\gamma^k + \Gamma_{jk}^i (f_\beta^k \bar{\theta}_\gamma^\beta(\bar{e}_\alpha) + f_{\gamma\alpha}^k) f_\alpha^j. \end{aligned} \quad (4.10)$$

由 $d(f_{\gamma\alpha}^i) = 0$ 可知,

$$f_{\alpha\beta, \bar{\gamma}}^i - f_{\alpha\bar{\gamma}, \beta}^i = -f_{\bar{\gamma}}^i \overline{R_{\alpha\gamma\beta}^\eta}. \quad (4.11)$$

再由 M 是近 Kähler 的条件可导出

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta f_\gamma^i &= \frac{1}{2} \tilde{\Delta} f_\gamma^i \\ &= \nabla_{e_\alpha} (df_\gamma^i(\bar{e}_\alpha)) - df_\gamma^i(\nabla_{e_\alpha} \bar{e}_\alpha) \\ &= d(f_{\gamma\alpha}^i + f_\beta^i \bar{\theta}_\gamma^\beta(\bar{e}_\alpha))(e_\alpha) - df_\gamma^i(\bar{e}_\beta) \bar{\theta}_\alpha^\beta(e_\alpha) \\ &= f_{\gamma\alpha, \alpha}^i + f_{\beta\alpha}^i \bar{\theta}_\gamma^\beta(e_\alpha) + f_{\gamma\beta}^i \bar{\theta}_\alpha^\beta(e_\alpha) + df_\beta^i(\bar{e}_\alpha) \bar{\theta}_\gamma^\beta(\bar{e}_\alpha) \\ &\quad + f_\beta^i d(\bar{\theta}_\gamma^\beta(\bar{e}_\alpha))(e_\alpha) - df_\gamma^i(\bar{e}_\beta) \bar{\theta}_\alpha^\beta(e_\alpha). \end{aligned} \quad (4.12)$$

利用上述等式, 得到

$$|\Delta f_\gamma^i| \leq c \left(\sum_{\alpha, j} (|\text{grad}(f_\alpha^j)| + |f_\alpha^j|) \right). \quad (4.13)$$

由于 Laplace-Beltrami 算子 Δ 是实的, 则由 Aronszajn 唯一连续性定理可得, 在 V 成立

$$\bar{\partial} f \equiv 0. \quad (4.14)$$

因此, $p \in U'$, 这样 U' 不能有边界, 也即 $U' = M$. $\square$

5 关于近 Kähler 流形的一个强正则性定理

令 (M, g, J) 是紧致近 Kähler 流形, (N, h, J') 是紧致 Kähler 流形, 其复维数至少是 2 并且具强负曲率. 假设 (M, g, J) 满足 $|\bar{\partial}\bar{\partial}\varphi|^2 \leq \lambda|\bar{\partial}\partial\varphi|^2$, 这里 φ 是定义于 M 上的任意复值函数, 常数 $\lambda < \frac{1}{2}$. 我们得

$$\begin{aligned} & -2h_{i\bar{j}}D'\bar{\partial}f^i \wedge D''\partial f^{\bar{j}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} - 2h_{i\bar{j}}D''\bar{\partial}f^i \wedge D'\partial f^{\bar{j}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} - 2h_{i\bar{j}}D'\partial f^i \wedge D''\bar{\partial}f^{\bar{j}} \wedge \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ & = \left(\sum_{i=1}^n 2|\bar{\partial}\partial f^i|^2 - \sum_{i=1}^n 2|\bar{\partial}\bar{\partial}f^i|^2 - \sum_{i=1}^n 2|\partial\partial f^i|^2 \right) \frac{\omega^n}{(n)!} \\ & \geq \sum_{i=1}^n 2(1-2\lambda)|\bar{\partial}\partial f^i|^2 \frac{\omega^n}{(n)!} \\ & = 2(1-2\lambda)|D'\bar{\partial}f^i|^2 \frac{\omega^n}{(n)!}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

利用 Bochner 型恒等式可得

$$\int_M (b + 2(1-2\lambda)|D'\bar{\partial}f|^2) \frac{\omega^n}{n!} \leq 0. \quad (5.2)$$

在出发流形取局部酉标架 $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^m$, 在目标流形取局部复坐标系, 直接计算可得

$$f_{\bar{\beta}\alpha}^i + \Gamma_{jk}^i f_\alpha^j f_{\bar{\beta}}^k = 0, \quad (5.3)$$

$$f_\alpha^i \overline{f_\beta^j} - f_{\bar{\beta}}^i \overline{f_\alpha^j} = 0, \quad (5.4)$$

这里 i, j, α 和 β 是任意的. 类似于命题 4.1 的证明, 可得下述命题.

命题 5.1 令 (M, g, J) 为紧致近 Kähler 流形, (N, h, J') 是紧致 Kähler 流形, 其曲率是强负的. 假设 (M, g, J) 满足 $|\bar{\partial}\bar{\partial}\varphi|^2 \leq \lambda|\bar{\partial}\partial\varphi|^2$, 这里 φ 是定义于 M 上的任意复值函数, 常数 $\lambda < \frac{1}{2}$. 如果 $f: M \rightarrow N$ 是调和函数, 其秩必在某点至少是 3, 那么其必是 $\pm$ -全纯的.

利用上述关于调和映照的复解析性, 可得如下关于近 Kähler 流形的强正则性定理.

定理 5.1 令 (M, g, J) 为紧致近 Kähler 流形, (N, h, J') 是紧致 Kähler 流形, 其曲率是强负的, 并且 $\dim_{\mathbb{C}} M = \dim_{\mathbb{C}} N \geq 2$. 假设 (M, g, J) 满足 $|\bar{\partial}\bar{\partial}\varphi|^2 \leq \lambda|\bar{\partial}\partial\varphi|^2$, 这里 φ 是定义于 M 上的任意复值函数, 常数 $\lambda < \frac{1}{2}$. 如果 M 与 N 同伦, 则 M 必双全纯或反全纯等价于 N .

证明 根据定理条件, 我们可找到一个连续的度为一的同伦等价 $\rho: M \rightarrow N$. 令 $f: M \rightarrow N$ 是一调和映照同伦于 ρ , 根据命题 5.1 可知, f 必定是 $\pm$ -全纯映照, 不妨设 f 是全纯的.

令 W 是 M 中使得 f 不是局部同胚的点的集合 (也即那些点上 f 的 Jacobi 行列式为 0). 由于

$$\deg f = \deg \rho = 1,$$

则 $W \neq M$. 显然, $M \setminus W$ 是开集. 由于 f 是全纯的, 则有

$$df(\mathbf{N}(X, Y)) = \mathbf{N}^*(df(X), df(Y)) = 0, \quad (5.5)$$

这里 $\mathbf{N}^*$ 是 N 的 Nijenhuis 张量. 因此, 在点 $x \in M \setminus W$ 处必有 $\mathbf{N} = 0$.

接下来将证明 $M \setminus W$ 是 M 的稠密开子集. 如果不是, 则存在一点 $x_0 \in W$ 和一邻域 U 使得 $x_0 \in U \subset W$. 令 U' 为包含 U 使得其上 f 的 Jacobi 行列式为零的最大子集. 如果 $U' \neq M$, 则必存在

一点 $p \in \partial U'$. 令 S 为 p 的足够小邻域使得其上有局部酉标架并且其像 $f(S)$ 可被一局部复坐标系覆盖. 由于 f 是全纯的, 则有

$$f^*(dz^1 \wedge \cdots \wedge z^n) = \det(f_\alpha^i) \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n. \quad (5.6)$$

对上式两边做外微分可得

$$\begin{aligned} 0 &= d(f^*(dz^1 \wedge \cdots \wedge z^n)) \\ &= d(\det(f_\alpha^i)) \wedge \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n + \sum (-1)^{\beta-1} \det(f_\alpha^i) \theta^1 \wedge \cdots \wedge d\theta^\beta \wedge \cdots \wedge \theta^n. \end{aligned} \quad (5.7)$$

由上式可得

$$\bar{\partial} \det(f_\alpha^i) = \det(f_\alpha^i) \left(\sum \theta_\beta^\beta(\bar{e}_\eta) \bar{\theta}^\eta \right) \quad (5.8)$$

和

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \det(f_\alpha^i) &= \frac{1}{2} \tilde{\Delta} \det(f_\alpha^i) = \sqrt{-1} \Lambda \partial \bar{\partial} (\det(f_\alpha^i)) \\ &= d(\det(f_\alpha^i))(e_\gamma) \theta_\beta^\beta(\bar{e}_\gamma) + \det(f_\alpha^i) d(\theta_\beta^\beta(\bar{e}_\gamma))(e_\gamma) - \det(f_\alpha^i) \theta_\beta^\beta(\bar{e}_\eta) \bar{\theta}_\gamma^\eta(e_\gamma), \end{aligned} \quad (5.9)$$

这里 $\wedge$ 是表示与 Kähler 形式 ω 做缩并, 则

$$|\Delta(\det(f_\alpha^i))| \leq c(|\text{grad}(\det(f_\alpha^i))| + |\det(f_\alpha^i)|). \quad (5.10)$$

由 Aronszajn 唯一连续性定理可知, 在 S 上必成立 $\det(f_\alpha^i) \equiv 0$, 因此, $U' = M$, 也即 f 在 M 上处处非局部同胚, 这样就导出矛盾. 因此, $M \setminus W$ 必是 M 的稠密子集. 另一方面, 由于在 $M \setminus W$ 上 $N = 0$, 可知在 M 上 $N \equiv 0$, 也即近复结构 J 是可积的. 根据萧荫堂关于 Kähler 流形的强正则性定理可知 f 必是双全纯等价映照. $\square$

致谢 作者对王斯雷教授给予的指导和帮助表示深深的感谢, 也感谢审稿人对本文所提的建议和帮助.

参考文献

- 1 Siu Y T. The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds. *Ann of Math* (2), 1980, 112: 73–111
- 2 Newlander A, Nirenberg L. Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Ann of Math* (2), 1957, 65: 391–404
- 3 Lichnerowicz A. *Theorie Globale des Connexions et des Groupes d'Holonomie*. Roma: Edizioni Cremonese, 1962
- 4 Chern S S. *Complex Manifolds Without Potential Theory*, 2nd ed. Universitext. New York: Springer-Verlag, 1979
- 5 Tosatti V, Weinkove B, Yau S T. Taming symplectic forms and the Calabi-Yau equation. *Proc Lond Math Soc* (3), 2008, 97: 401–424
- 6 Gudmundsson S, Wood J C. Harmonic morphisms between almost Hermitian manifolds. *Boll Unione Mat Ital* (9), 1997, 11: 185–197
- 7 Tricerri F, Vaisman I. On some 2-dimensional Hermitian manifolds. *Math Z*, 1986, 192: 205–216
- 8 Kobayashi S, Nomizu K. *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1. New York-London: Interscience Publishers, 1963
- 9 Gauduchon P. Hermitian connections and Dirac operators. *Boll Unione Mat Ital* (9), 1997, 11: 257–288
- 10 Eells J Jr, Sampson J H. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *Amer J Math*, 1964, 86: 109–160
- 11 Zhang X. Hermitian harmonic maps between almost Hermitian manifolds. In: *Recent Developments in Geometry and Analysis*. Advanced Lectures in Mathematics (ALM), vol. 23. Somerville: International Press, 2012, 485–493

- 12 Lichnerowicz A. Applications harmoniques et varietes Kähleriennes. Symp Math Bologna, 1970, 3: 341–402
- 13 Jost J, Yau S T. A nonlinear elliptic system for maps from Hermitian to Riemannian manifolds and rigidity theorems in Hermitian geometry. Acta Math, 1993, 170: 221–254

The strong rigidity of compact almost-Kähler manifolds

Jiayu Li & Xi Zhang

Abstract In this paper, we consider the complex-analyticity of harmonic maps from almost-Kähler manifolds into Kähler manifolds, and we obtain a generalized Bochner type identity. As the application, we obtain a strong rigidity theorem of compact almost-Kähler manifold.

Keywords almost-Kähler manifold, harmonic map, complex-analyticity

MSC(2010) 53C07, 58E15

doi: 10.1360/N012018-00088