Bondi-Sachs 度量与引力波

献给胡和生教授 90 华诞

张晓

中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所, 北京 100190

E-mail: xzhang@amss.ac.cn

收稿日期: 2017-09-26; 接受日期: 2017-10-31; 网络出版日期: 2017-12-19

国家自然科学基金 (批准号: 11571345) 资助项目

摘要 广义相对论中, 引力波是具波的形式并且辐射能量的真空时空度量, 而 Bondi-Sachs 度量是这类度量的自然描述之一. 本文将概述零宇宙常数时 Bondi-Sachs 度量的 Bondi 能量动量非负性定理、Bondi 能量动量和 ADM (Arnowitt-Deser-Misner) 能量动量的关系, 以及非零宇宙常数时 Bondi-Sachs 度量的一类自然边值条件及其在该边值条件下的 peeling 性质、 B -引力波的一些新特性.

关键词 广义相对论 Bondi-Sachs 度量 引力波 宇宙常数

MSC (2010) 主题分类 83C30, 83C35, 53B50

1 引言

非常高兴能受邀为庆贺胡和生先生 90 华诞专辑写一篇文章. 胡和生先生早年曾研究过广义相对论球对称引力场. Tolman 解是零压力时一类特殊的球对称引力场, 在 Oppenheimer 和 Snyder 的经典工作中, 该解被用以分析零压力密度均匀球对称星体引力塌缩形成黑洞的过程. 1974 年, 胡和生先生在《复旦学报》上发表了论文 [1], 给出了零压力球对称引力场方程的全部严格显式解并分析了解的奇点性质. 而在 1973 年, 谷超豪先生在发表于《复旦学报》的文章中讨论了密度非均匀球对称星体引力塌缩形成黑洞的过程, 构造了非中心奇点, 这实际上给出了裸奇点的例子 [2]. Choquet-Bruhat 在其专著 [3] 的第 96 和 98 页上指出 (原文见脚注¹⁾), 谷超豪先生和胡和生先生的这些研究工作发表在中国

1) It is believed that when a star has exhausted all thermonuclear sources of energy, it will collapse under its own gravitational field. Oppenheimer and Snyder¹⁰ have given a rigorous study of the process for a spherically symmetric dust cloud by using a special solution given by Tolman¹¹, in the restricted case of a spatially constant matter density starting from rest. This study was taken anew by Gu Chao Hao¹², in a study of the Tolman solution, but not restricted to spatially constant matter. Gu Chao Hao gave an analysis of shell crossing singularities as well as the essential singularity at the centre of symmetry. He gave a detailed mathematical discussion of the formation of horizons and of what is now called the nakedness of these singularities. Hu Hesheng¹³ constructed the complete solutions of the fully general spherically symmetric solution for dust, not restricted to the Tolman class, and discussed their properties. The work done by Gu Chao Hao and

英文引用格式: Zhang X. Bondi-Sachs metrics and gravitational waves (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 849–858, doi: 10.1360/N012017-00208

的杂志上, 当时没有被西方学者注意到, 这些研究成果后来被西方学者重新得到. 西方学者的研究受到了宇宙监督猜想的启发, 他们得到的结果其实早已经出现在谷超豪先生的文章中. 本文拟在他们曾研究过的广义相对论领域, 对引力波理论中一些数学问题的研究作一小结.

广义相对论中, 时空是一个 4 维 Lorenz 流形 $(L^{3,1}, g)$ 并满足 Einstein 场方程

$$R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2}g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta},$$

其中 $R_{\alpha\beta}$ 和 R 分别是 g 的 Ricci 曲率张量和数量曲率, Λ 是宇宙常数, $T_{\alpha\beta}$ 是物质的能量动量张量. 实际上, Λ 是真空时空 $T_{\alpha\beta} = 0$ 的 Ricci 曲率, 这时 Einstein 场方程简化成 $R_{\alpha\beta} = \Lambda g_{\alpha\beta}$. 从数学角度看, 引力波是具波的形式并且辐射能量的真空时空度量. 在 1916 年, Einstein^[4] 基于场方程的线性化理论预言了引力波的存在. 在 2016 年 2 月 11 日, LIGO 科学合作组织和 Virgo 合作团队宣布他们利用高级 LIGO 探测器, 于 2015 年 9 月 14 日首次探测到了引力波信号^[5]. 信号来自 13 亿光年远的分别相当于 36 和 29 个太阳质量的黑洞的合并, 合并后形成一个总质量是 62 个太阳质量的黑洞, 有 3 个太阳质量的能量以引力波的形式在不到 1 秒的时间内释放. 2017 年 10 月 3 日, 2017 年度诺贝尔物理奖颁发给三位物理学家 Weiss、Barish 和 Thorne, 以表彰他们对 LIGO 探测器和引力波观测的决定性贡献.

在对探测数据的处理上, 科学家主要是用场方程的线性化理论, 场方程近似下的高阶项对数据处理的影响基本上可以忽略. 然而, 由于时空度量的非线性特征, 对于引力波一些理论性质的研究以及对于其中一些数学问题的研究, 场方程的线性化理论远远不够.

本文主要从描述引力波的 Bondi-Sachs 度量出发, 讨论零宇宙常数时引力波的 Bondi 能量动量的性质以及非零宇宙常数特别是正宇宙常数 Bondi-Sachs 度量物理上自然的边值条件和该边值条件下的 peeling 性质. 假设时空存在一个光滑函数 u , 其水平集是一族不相交的类光超曲面, 如下形式的度量称为 Bondi-Sachs 度量:

$$g = -\left(e^{2\beta}\frac{V}{r} - r^2 h_{\mu\nu} U^\mu U^\nu\right) du^2 - 2e^{2\beta} du dr - 2r^2 h_{\mu\nu} U^\nu du dx^\mu + r^2 h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

其中 $\mu, \nu = 2, 3$, $U^2 = U$, $U^3 = W \csc \theta$,

$$h \equiv \begin{pmatrix} h_{22} & h_{23} \\ h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e^{2\gamma} \cosh 2\delta & \sinh 2\delta \sin \theta \\ \sinh 2\delta \sin \theta & e^{-2\gamma} \cosh 2\delta \sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

这里 u 是延迟坐标, $r = x^1$, $\theta = x^2$ 和 $\psi = x^3$ 是极坐标, $\beta, \gamma, \delta, V, U$ 和 W 是时空的光滑函数. 在宇宙常数为零时, 该度量在轴对称情形首先由 Bondi 等^[6] 引入, 后来 Sachs^[7] 研究了一般渐近平坦情形. 这时真空方程化为关于 $\beta, \gamma, \delta, V, U$ 和 W 的一组方程^[6,7]. 宇宙常数非零时对 Bondi-Sachs 度量和场

Hu Hesheng for non-homogeneous dust clouds was done again, unaware of these papers published in China, by Müller zum Hagen, Seifert, and Yodzis¹⁴ (Tolman class, shell crossing singularities), Christodoulou¹⁵ (starting from rest, central singularities) and Richard Newman¹⁶ (general solution). These western papers were motivated by the cosmic censorship conjecture, which is violated both at “shell crossing” singularities and at the centre, as was already shown in Gu’s paper.

¹⁰Oppenheimer, J. R. and Snyder, H. (1939) Phys. Rev. **56**, 455.

¹¹Tolman, R. (1934) Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **20**, 169-76, Bondi, H. (1947) Mon. Nat. R. Astron. Soc., **107**, 410-25.

¹²Gu Chao Hao (1973) J. Fudan University, **1**, 73-8.

¹³Hu Hesheng (1974) J. Fudan University, **2**, 92-8.

¹⁴Müller zum Hagen, H., Seifert, H. J., and Yodzis, P. (1973) Comm. Math. Phys., **34**, 134-48).

¹⁵Christodoulou, D. (1984) Commun. Math. Phys., **93**, 171-95.

¹⁶Newman, R. (1986) Class. Quantum Grav., **3**, 527-39.

方程的研究可参见文献 [8] 及其引用的参考文献. 正宇宙常数时空有所谓的“宇宙视界” (cosmological horizon), 这时 u 在宇宙视界内部和外部都光滑, 但在视界上只连续不可微.

物理上, 一方面, 在引力波产生前 $u \rightarrow -\infty$ 时时空的状态是已知的, 其作为初值. 另一方面, 在引力波产生前后 $r \rightarrow \infty$ 无穷远处时空的状态也是已知的, 其作为边值, 在零宇宙常数时边值为 Minkowski 时空, 在正宇宙常数时边值为 de-Sitter 时空, 在负宇宙常数时边值为反 de-Sitter 时空. 数学上, 需要解真空场方程的初边值问题以确定引力波. 这是一个拟线性双曲方程组的双特征问题, 至今仍是一个未解决问题.

2 零宇宙常数

2.1 Bondi 能量动量

边值条件要求当 $r \rightarrow \infty$ 时 h 趋向于标准单位球面, 仿照电磁波理论可引入如下 Sommerfeld 辐射条件:

$$\gamma = \frac{c}{r} + \left(C - \frac{1}{6}c^3 - \frac{3}{2}cd^2 \right) \frac{1}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad \delta = \frac{d}{r} + \left(D + \frac{1}{2}c^2d - \frac{1}{6}d^3 \right) \frac{1}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right),$$

这时真空场方程给出

$$\begin{aligned} \beta &= B - \frac{c^2 + d^2}{4r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \\ W &= X + 2e^{2B}B_{,\phi} \csc \theta \frac{1}{r} + e^{2B}(2cB_{,\phi} \csc \theta - 2dB_{,\theta} - \bar{l}) \frac{1}{r^2} + \frac{3W}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \\ U &= Y + 2e^{2B}B_{,\theta} \frac{1}{r} - e^{2B}(2dB_{,\phi} \csc \theta + 2cB_{,\theta} + l) \frac{1}{r^2} + \frac{3U}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \\ V &= (\cot \theta Y + \csc \theta X_{,\phi} + Y_{,\theta})r^2 + e^{2B}(4B_{,\phi}^2 \csc^2 \theta + 2B_{,\phi\phi} \csc^2 \theta \\ &\quad + 2B_{,\theta} \cot \theta + 4B_{,\theta}^2 + 2B_{,\theta\theta} + 1)r - 2M + O\left(\frac{1}{r}\right), \\ M_{,u} &= -(c_{,u})^2 - (d_{,u})^2 + \frac{1}{2}(l_{,\theta} + l \cot \theta + \bar{l}_{,\phi} \csc \theta)_{,u}, \end{aligned}$$

其中 c 、 d 、 B 、 X 、 Y 、 M 、 ${}_3W$ 和 ${}_3U$ 等级数展开中的系数都是定义在 $\mathbb{R} \times S^2$ 上关于 u 、 θ 和 ψ 的光滑函数, $l = c_{,\theta} + 2c \cot \theta + d_{,\psi} \csc \theta$, $\bar{l} = d_{,\theta} + 2d \cot \theta - c_{,\psi} \csc \theta$. 技术上需要假设一些正规化条件, 即对所有的 u 都成立 $\int_0^{2\pi} c(u, 0, \psi) d\psi = \int_0^{2\pi} c(u, \pi, \psi) d\psi = 0$. 物理上称 $c_{,u}$ 和 $d_{,u}$ 为引力波的新闻 (news) 函数. 6 个函数 B 、 X 、 Y 、 M 、 ${}_3W$ 和 ${}_3U$ 是由积分产生的任意积分函数, 由初值和边值决定.

Bondi 等^[6] 首先观察到, 如要保持 $g_{uu} < 0$, 必须有 $X = Y = 0$, 另外可以选取合适的坐标变换使得 $B = 0$ (也可参见文献 [7]). 记 $n^0 = 1$, $n^1 = \sin \theta \cos \psi$, $n^2 = \sin \theta \sin \psi$, $n^3 = \cos \theta$. Bondi 等在类光无穷远处定义了 Bondi 能量动量

$$m_\nu(u) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} M(u, \theta, \psi) n^\nu dS, \quad \nu = 0, 1, 2, 3,$$

并推导出著名的 Bondi 能量损耗公式^[6]

$$\frac{d}{du} m_0(u) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} (c_{,u})^2 + (d_{,u})^2 \leq 0.$$

记 $|m(u)| = \sqrt{m_1^2(u) + m_2^2(u) + m_3^2(u)}$. 如果 $|m(u)| \neq 0$, Huang 等^[9] 可以证明更一般的 Bondi 能量动量损耗公式

$$\frac{d}{du}(m_0(u) - |m(u)|) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} [(c_{,u})^2 + (d_{,u})^2] \left(1 - \frac{m_i n^i}{|m|}\right) \leq 0.$$

这说明 Bondi 能量动量可以看成在 u 时刻由于引力波因引力辐射携带走能量动量后引力系统剩余的总能量动量.

物理上猜想引力波无法携带走比初始能量更多的能量, 即 Bondi 能量是非负的. 关于该猜想的证明曾被断言可以使用 Schoen- 丘成桐和 Witten 的正能量猜想的证明方法给出, 参见文献 [10] 及其中的参考文献. 然而, 当数学上找到严格、完整的证明时, 发现需要假设一些额外的条件^[9]. 本文仅列出文献 [9] 中应用张晓证明的渐近类光无穷远正能量定理^[11] 给出的一个证明, 更详尽的论述参见文献 [9, 12, 13].

定理 1^[9] 假设在真空 Bondi-Sachs 时空中存在 u_0 , 使得 $c(u_0) = d(u_0) = 0$, 那么, (i) 对所有的 $u \leq u_0$, 有 $m_0(u) \geq |m(u)|$; (ii) 如果存在 $u_1 < u_0$ 使得 $m_0(u_0) = |m(u_0)|$, $m_0(u_1) = |m(u_1)|$, 那么时空在区域 $(u_1, u_0]$ 中是平坦的.

Bondi 能量非负性成立时, Bondi 质量 $\sqrt{m_0^2 - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2}$ 是适定的. 物理上, Bondi 能量非负意味着 Bondi-Sachs 时空要满足能量动量守恒. 在下面的讨论中, 我们可以看到广义相对论中时空的能量动量守恒是一个复杂的问题, 并不总是成立. 特别地, Bondi-Sachs 时空一般不满足能量动量守恒, 因而, Bondi 能量非负性猜想可能并不正确. 尽管这样, 还没有找到负 Bondi 能量的例子.

2.2 Bondi 能量动量与 ADM 能量动量的关系

广义相对论渐近平坦时空的总能量和总动量是定义在 3 维渐近平坦类空超曲面 (M, g, h) 上的, 其中 g 是 M 的度量, h 是 M 在时空中的第二基本形式, (M, g, h) 称为初始数据集. 拓扑上, M 有有限个“端”, 每个端与球外的 3 维欧氏空间微分同胚. 在每个端的欧氏坐标系 $\{x^i\}$ 中, $g_{ij} = \delta_{ij} + a_{ij}$,

$$a_{ij} = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \partial_k a_{ij} = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \partial_l \partial_k a_{ij} = O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad h_{ij} = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \partial_k h_{ij} = O\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

该渐近平坦初始数据集的总能量 E 和总动量 P_k ($k = 1, 2, 3$) 由 Arnowitt 等^[14] 定义

$$E = \frac{1}{16\pi} \int_{S_\infty} (\partial_j g_{ij} - \partial_i g_{jj}) * dx^i, \quad P_k = \frac{1}{8\pi} \int_{S_\infty} (h_{ki} - g_{ki} \text{tr}_g(h)) * dx^i,$$

其中 S_∞ 是端无穷远处的球面.

性质 1 假设时空在无穷远处是真空或满足 $T_{\alpha\beta} = o(\frac{1}{r^2})$ 并且度量取下面的形式:

$$g = -\Phi(t, x)^2 dt^2 + g_{ij}(t, x) dx^i dx^j, \quad \Phi = 1 + O\left(\frac{1}{r^\tau}\right), \quad \partial_i \Phi = O\left(\frac{1}{r^{1+\tau}}\right), \quad \partial_i \partial_j \Phi = O\left(\frac{1}{r^{2+\tau}}\right), \quad \tau > 0,$$

那么有 $\partial_t E = \partial_t P_k = 0$, 从而时空满足能量动量守恒.

该性质的证明是显然的, 标准的计算得出

$$\partial_t g_{ij} = 2\Phi h_{ij}, \quad \partial_t h_{ij} = \nabla_i \nabla_j \Phi + \Phi(R_{ij} - R_{ij} - \text{tr}_g(h)h_{ij} + 2h_{il}h_{lj}),$$

其中初始数据集由 t 为常数的类空超曲面给出, R_{ij} 是初始数据集上诱导度量 g_{ij} 的 Ricci 曲率张量. 直接代入 ADM 的表达式可知 $\partial_t E = \partial_t P_k = 0$.

一个基本的问题是, Bondi 能量动量与 ADM 能量动量之间有着什么样的关系? 在 1979 年, 对共形紧、在类光和类空无穷远处都是渐近单和渐近平坦的时空, Ashtekar 和 Magnon-Ashtekar^[15] 证明了类空无穷远处的能量动量等于 Bondi 能量动量沿着光锥趋向“过去无穷远”的极限. 共形紧化时空是 Penrose 在 20 世纪 60 年代提出的一种研究时空的几何方法, 其给出了引力波的另一种描述. 关于共形紧时空有众多研究, 可参见 Penrose 和 Rindler 的专著 [16]. 然而, 正如 Penrose 和 Rindler 在该专著 (第二卷第 429 页) 中指出的那样, 这时的“过去”极限是否就是 ADM 能量动量, 这决不是显而易见的.

Zhang^[17] 提出了 Bondi-Sachs 度量类空无穷远处的两类边值条件. 粗略地讲, 第一类边值条件是指时空类空超曲面上的度量是渐近平坦的; 第二类边值条件是指时空类空超曲面上的度量虽然可以写成 $g_{ij} = \delta_{ij} + a_{ij}$, 然而 a_{ij} 和 h_{ij} 及其各阶导数都是 r^{-1} 阶衰减但是存在有限的 ADM 能量动量. 这两类边值条件分别蕴含下面的两个条件: 当 $u \rightarrow -\infty, r \rightarrow \infty$ 时,

(i) $M, c, d, M_{,\theta}, M_{,\psi}, c_{,\theta}, c_{,\psi}, d_{,\theta}$ 和 $d_{,\psi}$ 有界并且 $M_{,u}, c_{,u}$ 和 $d_{,u}$ 是 r^{-1} 阶衰减;

(ii) $M, c, d, M_{,u}, M_{,\theta}, M_{,\psi}, c_{,u}, c_{,\theta}, c_{,\psi}, d_{,u}, d_{,\theta}$ 和 $d_{,\psi}$ 有界.

例如, 函数 $f(\theta, \psi) + \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ 满足条件 (i), 函数 $\sin u + f(\theta, \psi) + \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ 满足条件 (ii). Schwarzschild 度量满足第一类边值条件但是不辐射能量. 对于真空 Bondi-Sachs 度量, Zhang^[17] 证明了在第一类边值条件下 Bondi 能量动量的“过去”极限是 ADM 能量动量, 并在第二类边值条件下计算出了 Bondi 能量的“过去”极限与 ADM 能量之间相差的量, Huang 和 Zhang^[18] 在第二类边值条件下计算出了 Bondi 动量的“过去”极限与 ADM 动量之间相差的量.

定理 2^[17] 在第一类边值条件下, ADM 能量动量是 Bondi 能量动量的“过去”极限:

$$E = m_0(-\infty), \quad P_k = m_k(-\infty).$$

并且

$$E = m_0(u) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^u \int_{S^2} ((c_{,u})^2 + (d_{,u})^2), \quad P_k = m_k(u) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^u \int_{S^2} ((c_{,u})^2 + (d_{,u})^2) n^k.$$

定理 3^[17, 18] 在第二类边值条件下, ADM 能量动量与 Bondi 能量动量之间存在关系式:

$$E = m_0(-\infty) + \frac{1}{2\pi} \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_{S^2} (cc_{,u} + dd_{,u}), \quad P_k = m_k(-\infty) + \frac{1}{8\pi} \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_{S^2} \mathbb{P}_k,$$

其中

$$\mathbb{P}_1 = [(c_{,u} + M_{,u})l + d_{,u}\bar{l}] \cos \theta \cos \psi + [(c_{,u} - M_{,u})\bar{l} - d_{,u}l] \sin \psi,$$

$$\mathbb{P}_2 = [(c_{,u} + M_{,u})l + d_{,u}\bar{l}] \cos \theta \sin \psi - [(c_{,u} - M_{,u})\bar{l} - d_{,u}l] \cos \psi,$$

$$\mathbb{P}_3 = -[(c_{,u} + M_{,u})l + d_{,u}\bar{l}] \sin \theta.$$

在第二类边值条件下 ADM 能量动量守恒不成立. 即使在第一类边值条件下 ADM 能量动量守恒是否成立也不知道, 原因是 Bondi-Sachs 度量无法写成性质 1 中度量的形式. 在第一类边值条件下, 定理 2 说明 ADM 能量总是不少于 Bondi 能量, 这时 $E - m_0(u)$ 是引力波辐射掉的能量, $P_k - m_k(u)$ 是引力波导致系统动量的变化. 在第一类边值条件下, Bondi 能量动量在类空无穷远处是恒量, 没有引力辐射. 一个重要的问题是, 第一类边值条件是否会排除引力波的存在? 如果 Bondi-Sachs 度量在类光或类空无穷远处没有引力辐射, 数学上是否可以证明在全空间也没有引力辐射? 这是关于波方程的广义的一致连续性问题. 对于 Minkowski 时空上的线性波方程和一些非线性波方程, 在一定条件下的一致连续性有肯定的答案, 可参见文献 [19, 20] 及其中引用的相关参考文献.

3 非零宇宙常数

3.1 渐近展开

在 1998 年, 科学家通过天文观测发现宇宙在加速膨胀, 宇宙常数为正. 这样正宇宙常数引力波理论显得更为重要. 近年来, 该问题吸引了众多学者的关注和研究 (参见文献 [8, 21–32]), 正宇宙常数时空的渐近行为、场方程的线性化理论、引力波的 memory 效应和 peeling 性质等问题得到了深入的研究. 文献 [8] 发现, 在假设 Sommerfeld 辐射条件下, 非零宇宙常数 Bondi-Sachs 度量中 γ 、 δ 、 β 、 U 和 W 的级数展开式与零宇宙常数时一样, 但是 V 的级数展开式与零宇宙常数时不同:

$$V = -\frac{e^{2B}\Lambda}{3}r^3 + (\cot\theta Y + \csc\theta X_{,\phi} + Y_{,\theta})r^2 + e^{2B}(4B_{,\phi}^2 \csc^2\theta + 2B_{,\phi\phi} \csc^2\theta + 2B_{,\theta} \cot\theta + 4B_{,\theta}^2 + 2B_{,\theta\theta} + 1)r - 2M + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

重要的是这时 X 和 Y 都不为零, B 不一定为零, 6 个积分函数 B 、 X 、 Y 、 M 、 ${}_3W$ 和 ${}_3U$ 都可能含有宇宙常数. 令 $X = \Lambda a \sin\theta$, $Y = \Lambda b \sin\theta$, 那么 a 和 b 满足方程

$$a_{,\phi} - \sin\theta b_{,\theta} = -\frac{2}{3}e^{2B}c, \quad b_{,\phi} + \sin\theta a_{,\theta} = \frac{2}{3}e^{2B}d.$$

这意味着在相差 u 的函数 $\rho(u)$ 和 $\sigma(u)$ 后, a 和 b 完全由 c 、 d 和 B 所决定.

在 $\Lambda < 0$ 情形, 关于 γ 和 δ 等函数是在 $r = \infty$ 级数展开的. 但在 $\Lambda > 0$ 情形, 由于存在宇宙视界, 其距离大约是 $\sqrt{3\Lambda^{-1}}$, 这时函数 u 在宇宙视界上只连续不可导, 函数只能在宇宙视界的内部靠近宇宙视界级数展开或者在宇宙视界外部在 $r = \infty$ 级数展开, 这样级数展开式中的系数是否包含宇宙常数将对级数的渐近行为起着重要的影响. 文献 [32] 给出的边值条件是 Sommerfeld 辐射条件下的渐近展开并选取不包含宇宙常数的函数 B 、 c 、 d 、 a 和 b . 也就是说, 如果形式上把 Λ 看成一个变量, 非零宇宙常数时要求

$$\frac{\partial B}{\partial \Lambda} = \frac{\partial c}{\partial \Lambda} = \frac{\partial d}{\partial \Lambda} = \frac{\partial a}{\partial \Lambda} = \frac{\partial b}{\partial \Lambda} = 0.$$

这时 $M_{,u}$ 、 ${}_3W_{,u}$ 和 ${}_3U_{,u}$ 满足包含宇宙常数的一组复杂的方程. 称这样的边值条件为自然边值条件.

文献 [21] 给出了另外一种非 Sommerfeld 辐射条件下的渐近展开, 在轴对称时满足

$$\gamma = \Lambda f(u, \theta) + \frac{c(u, \theta)}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad B = X = Y = 0.$$

这时真空场方程给出 $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{c}{3}$ [21], 所以有

$$f(u, \theta) = f(-\infty, \theta) + \frac{1}{3} \int_{-\infty}^u c(s, \theta) ds.$$

物理上 $f(-\infty, \theta)$ 是已知的, 这样要使得 $f(u, \theta)$ 在现在和未来无穷远 $u \rightarrow \infty$ 存在, 上式右边的积分必须有限. 这实际上排除了一大批引力波, 凡是 $\int_{-\infty}^{\infty} c(s, \theta) ds = \infty$ 或者对某个有限值 u_0 有 $\int_{-\infty}^{u_0} c(s, \theta) ds = \infty$ 或 $\int_{u_0}^{\infty} c(s, \theta) ds = \infty$ 的引力波都不能被这样的级数展开描述. 文献 [29, 30] 中的渐近展开本质上与文献 [21] 是一样的, 限制性同样很强. 这类边值条件与前面讨论的文献 [8, 32] 中边值条件不同之处在于, 非零宇宙常数对前者的约束出现在函数 a 、 b 对 θ 和 ϕ 的导数上, 而对后者的约束出现在函数 f 对 u 的导数上. 因而前者有更大的自由度.

3.2 Peeling 性质

在 $\Lambda \neq 0$ 情形的 peeling 性质首先由 Penrose^[33] 对共形紧时空证明, 并由 Saw^[29,30] 应用 Newman-Penrose 方程在 $X = Y = 0$ 时对非共形紧时空给出证明, 这时的边值条件和 Penrose 共形紧时空是等价的. 对于文献 [8, 32] 中的渐近展开, 其共形边界 J^+ 上的度量为

$$\frac{e^{2B}\Lambda}{3}du^2 + 2Ydud\theta + 2Xdud\phi + d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2.$$

该度量在 $\Lambda > 0$ 时并不总是类空, 在 $\Lambda < 0$ 时并不总是类时. 还不清楚这时的边值条件是否与 Penrose 共形紧时空是等价的? 这种情形的 Bondi-Sachs 度量的 peeling 性质由 Xie 和 Zhang^[32] 证明.

在 Bondi-Sachs 度量中, 选取类光标架

$$\begin{aligned} e_0 = l &= e^{-2\beta} \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{V}{2r} \frac{\partial}{\partial r} + U \frac{\partial}{\partial \theta} + \csc \theta W \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ e_1 = k &= \frac{\partial}{\partial r}, \\ e_2 = m &= \frac{e^{-\gamma}}{r\sqrt{2\cosh 2\delta}} (1 - i \sinh 2\delta) \frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{e^{\gamma}\sqrt{\cosh 2\delta} \csc \theta}{\sqrt{2}r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ e_3 = \bar{m} &= \frac{e^{-\gamma}}{r\sqrt{2\cosh 2\delta}} (1 + i \sinh 2\delta) \frac{\partial}{\partial \theta} - i \frac{e^{\gamma}\sqrt{\cosh 2\delta} \csc \theta}{\sqrt{2}r} \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

在这组标架下, 真空 Bondi-Sachs 度量的 Weyl 曲率为

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{2}{3}\Lambda g_{i[k}g_{l]j}, \quad i, j, k, l = 0, \dots, 3.$$

其非零值共有 5 个, 称为 Newman-Penrose 量. 记

$$\Psi_0 = W_{1212}, \quad \Psi_1 = W_{1012}, \quad \Psi_2 = W_{1230}, \quad \Psi_3 = W_{0103}, \quad \Psi_4 = W_{0303}.$$

在 $\Lambda = 0$ 情形, 真空 Bondi-Sachs 度量 Newman-Penrose 量的衰减行为满足下面的 peeling 性质:

$$\Psi_k = O\left(\frac{1}{r^{5-k}}\right), \quad k = 0, \dots, 4.$$

在引力波的探测中, 衰减最慢的 Ψ_4 将会被测量到. 当宇宙常数非零时, 由于自然的边值中 B 、 X 和 Y 都不为零, 开始计算出的 Ψ_k 的衰减只满足

$$\Psi_k = -\frac{A_k}{r^{4-k}} + O\left(\frac{1}{r^{5-k}}\right), \quad k = 0, \dots, 4.$$

然而, 当用 $c = -\frac{3}{2}e^{-2B}(a_{,\phi} - \sin\theta b_{,\theta})$, $d = \frac{3}{2}e^{-2B}(b_{,\phi} + \sin\theta a_{,\theta})$ 代入 A_k 时, 令人吃惊地发现 $A_k = 0$, 这样 peeling 性质仍然成立.

定理 4^[32] 在非零宇宙常数真空 Bondi-Sachs 度量中, 对满足 Sommerfeld 辐射条件和与宇宙常数 Λ 无关的非平凡的函数 B 、 c 、 d 、 a 和 b 给出的自然边值条件, 当 $r \rightarrow \infty$ 时 peeling 性质成立:

$$\Psi_k = -[(\Psi_k^{5-k})^0 + O(\Lambda)] \frac{1}{r^{5-k}} + O\left(\frac{1}{r^{6-k}}\right), \quad k = 0, \dots, 4,$$

其中系数 $(\Psi_k^{5-k})^0$ 都是与宇宙常数 Λ 无关的函数. 特别地, $(\Psi_4^1)^0$ 、 $(\Psi_3^2)^0$ 和 $(\Psi_2^3)^0$ 由函数 B 、 a 和 b 所决定, $(\Psi_1^4)^0$ 由函数 B 、 a 和 b 及 ${}_3W$ 和 ${}_3U$ 中与宇宙常数 Λ 无关的部分所决定, $(\Psi_0^5)^0$ 由函数 C 和 D 中与宇宙常数 Λ 无关的部分所决定. 其他系数由 γ 和 δ 级数展开中的系数及函数 B 、 a 、 b 、 M 、 ${}_3W$ 和 ${}_3U$ 所决定.

由于宇宙常数 Λ 的值很小, 上述 peeling 性质表明宇宙常数对实验数据的测量影响很小, 实验数据主要来自 $(\Psi_4^1)^0$. 实际上, 我们猜测在宇宙视界附近 peeling 性质也成立, 这时 $\frac{(\Psi_4^1)^0}{r}$ 衰减最慢.

3.3 无新闻的引力波

在 Bondi-Sachs 度量中, 函数 c 和 d 刻画时空中类光无穷远单位球面上度量 h 在 $\frac{1}{r}$ 阶上偏离球面标准度量的程度, 新闻函数 c_u 和 d_u 刻画这种偏离的变化率. 在 $\Lambda = 0$ 时, 引力波通常理解为辐射能量的真空 Bondi-Sachs 度量, Bondi 能量动量及损耗公式准确地表述了引力波新闻函数导致的能量动量的变化. 如果新闻函数 $c_{,u} = d_{,u} = 0$, 那么度量 h 在 $\frac{1}{r}$ 阶上偏离球面标准度量的程度并不随时间变化而变化, 这时不辐射能量, 真空 Bondi-Sachs 度量不是引力波. 对于非稳态的 Bondi-Sachs 度量, c_u 和 d_u 非零, 这时一定辐射能量, 因而是引力波.

但是, $\Lambda \neq 0$ 时情形完全不同, 类光无穷远的 Bondi 能量动量的合理定义以及对应的损耗公式都还是未知的, 引力波是否辐射能量也是未知的. 为避免这些困难, 这时可认为引力波是非稳态的真空 Bondi-Sachs 度量. 如果 $c = d = 0$, 那么可推出新闻函数一定为零并且 a 和 b 只是 u 的函数, 由定理 4 中 $(\Psi_4^1)^0$ 的表达式可以看出, 如果 B 是非平凡的, 那么 $(\Psi_4^1)^0$ 可以非零, Bondi-Sachs 度量是引力波. 这是非零宇宙常数时引力波的一个新特性. 这类没有新闻的引力波可称为 B -引力波. 事实上, Xie 和 Zhang^[32] 发现了一些更特殊的非稳态轴对称的真空 Bondi-Sachs 度量

$$\begin{aligned} g = & \left[(C + \cos \theta)^2 \frac{\Lambda}{3} r^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{C'}{C^2 - 1} \right)^2 r^2 + \frac{2(C \cos \theta + 1)C'}{C^2 - 1} r - C^2 + 1 + \frac{2m(C^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{r(C + \cos \theta)} \right] du^2 \\ & - 2(C + \cos \theta) dudr + 2r \sin \theta \left(1 + \frac{C'}{C^2 - 1} r \right) dud\theta + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \end{aligned}$$

其中 $C(u)$ 是满足 $C(u) > 1$ 的任意函数,

$$\gamma = \delta = 0, \quad B = \frac{\ln(C(u) + \cos \theta)}{2}, \quad X = 0, \quad Y = -\frac{\sin \theta C'}{C^2 - 1}, \quad M = \frac{m(C^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{(C(u) + \cos \theta)^2}.$$

这时 Newman-Penrose 量有更快的衰减,

$$\Psi_0 = \Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 = -\frac{m(C^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{r^3(C + \cos \theta)^3}, \quad \Psi_3 = \frac{3m \sin \theta (C^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2} r^3 (C + \cos \theta)^4}, \quad \Psi_4 = -\frac{3m \sin^2 \theta (C^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{r^3 (C + \cos \theta)^5}.$$

这些解说明有些引力波非常弱, 无法在实验数据上显示出来.

如果记

$$\varpi_\nu(u) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} M(u, \theta, \psi) n^\nu dS, \quad \nu = 0, 1, 2, 3,$$

那么直接计算得到

$$\frac{d}{du} \varpi_\nu(u) = \frac{m(C^2 - 1)^{\frac{1}{2}} C'}{4\pi} \int_{S^2} \frac{C^2 + 3C \cos \theta + 2}{(C + \cos \theta)^3} n^\nu dS.$$

由此可见 $\frac{d}{du} \varpi_0(u)$ 的符号与 mC' 的符号相同, 可正可负. 而当 $C' = 0$ 时, 度量是稳态的, $\frac{d}{du} \varpi_\nu(u) = 0$.

3.4 小结

由 Sommerfeld 辐射条件以及不含宇宙常数的非平凡的函数 B 、 c 、 d 、 a 和 b 给出非零宇宙常数情形 Bondi-Sachs 度量的一类边值条件. 该边值条件和非平凡的新闻函数相容, 满足 peeling 性质以及

给出无新闻的新的一类 B -引力波, 并且宇宙常数对实验数据的影响可以忽略. 这些特性说明该边值条件是自然的. 另外, 非零宇宙常数时存在一些 Newman-Penrose 量衰减更快的 B -引力波, 可能无法在实验数据中显示出来.

4 未解决问题

关于 Bondi-Sachs 度量双特征问题存在性及解的性质如一致连续性等是引力波理论中基本而困难的数学问题. 此外, 正、负宇宙常数情形的引力波理论的研究刚处于开始阶段, 有很多未解决问题, 例如, 除了如何定义类光无穷远的 Bondi 能量动量外, 其与类空无穷远能量动量之间的关系也是一个值得研究的问题. 类空无穷远的能量动量的定义及正能量定理参见文献 [34–37] 及综述文献 [12, 13].

致谢 感谢审稿人提出的非常有益的修改意见.

参考文献

- 1 胡和生. 球对称引力场方程的严格解. 复旦学报, 1974, 1: 92–98 (Hu H S. Exact solutions of the spherically symmetric gravitational field equations. Front Math China, 2006, 1: 169–177)
- 2 谷超豪. 非均匀的球对称引力坍缩问题. 复旦学报, 1973, 3: 73–78 (Gu C H. Gravitation collapse of spherical symmetry with non-uniform density. Front Math China, 2006, 1: 161–168)
- 3 Choquet-Bruhat Y. General Relativity and the Einstein Equations. Oxford: Oxford University Press, 2009
- 4 Einstein A. Näherungsweise integration der feldgleichungen der gravitation. In: Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. Berlin: Wiley, 1916, 688–696
- 5 Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. Phys Rev Lett, 2016, 116: 061102
- 6 Bondi H, van der Burg M, Metzner A. Gravitational waves in general relativity, VII: Waves from axi-symmetric isolated systems. Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci, 1962, 269: 21–52
- 7 Sachs R. Gravitational waves in general relativity, VIII: Waves in asymptotically flat space-time. Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci, 1962, 270: 103–126
- 8 Ge H, Luo M, Su Q, et al. Bondi-Sachs metrics and photon rockets. Gen Relativity Gravitation, 2011, 43: 2729–2742
- 9 Huang W L, Yau S T, Zhang X. Positivity of the Bondi mass in Bondi's radiating spacetimes. Rend Lincei Mat Appl, 2006, 17: 335–349
- 10 Chruściel P T, Jezierski J, Łecki S. The Trautman-Bondi mass of hyperboloidal initial data sets. Adv Theor Math Phys, 2004, 8: 83–139
- 11 Zhang X. A definition of total energy-momenta and the positive mass theorem on asymptotically hyperbolic 3-manifolds, I. Comm Math Phys, 2004, 249: 529–548
- 12 Zhang X. Recent progress on the positive energy theorem. Internat J Modern Phys A, 2015, 30: 1545018
- 13 张晓. 广义相对论正能量定理. 中国科学: 数学, 2017, 47: 673–688
- 14 Arnowitt R, Deser S, Misner C. The dynamics of general relativity. In: Gravitation: An Introduction to Current Research. New York: Wiley, 1962, 227–264. Gen Relativity Gravitation, 2008, 40: 1997–2027
- 15 Ashtekar A, Magnon-Ashtekar A. Energy-momentum in general relativity. Phys Rev Lett, 1979, 43: 181–184
- 16 Penrose R, Rindler W. Spinors and Space-Time, I; II. Cambridge: Cambridge University Press, 1984; 1988
- 17 Zhang X. On the relation between ADM and Bondi energy-momenta. Adv Theor Math Phys, 2006, 10: 261–282
- 18 Huang W, Zhang X. On the relation between ADM and Bondi energymomenta III-perturbed radiative spatial infinity. Sci China Ser A, 2007, 50: 1316–1324
- 19 Lax P D, Phillips R S. Scattering Theory. Cambridge: Academic Press, 1967
- 20 Alexakis S, Shao A. Global uniqueness theorems for linear and nonlinear waves. J Funct Anal, 2015, 269: 3458–3499
- 21 He X, Cao Z. New Bondi-type outgoing boundary condition for the Einstein equations with cosmological constant. Internat J Modern Phys D, 2015, 24: 1550081
- 22 Ashtekar A, Bonga B, Kesavan A. Asymptotics with a positive cosmological constant, I: Basic framework. Classical Quantum Gravity, 2015, 32: 025004
- 23 Ashtekar A, Bonga B, Kesavan A. Asymptotics with a positive cosmological constant, II: Linear fields on de Sitter spacetime. Phys Rev D, 2015, 92: 044011

- 24 Ashtekar A, Bonga B, Kesavan A. Asymptotics with a positive cosmological constant, III: The quadrupole formula. *Phys Rev D*, 2015, 92: 104032
- 25 Ashtekar A, Bonga B, Kesavan A. Gravitational waves from isolated systems: Surprising consequences of a positive cosmological constant. *Phys Rev Lett*, 2016, 116: 051101
- 26 Bishop N T. Gravitational waves in a de Sitter universe. *Phys Rev D*, 2016, 93: 044025
- 27 Date G, Hoque S J. Gravitational waves from compact sources in a de Sitter background. *Phys Rev D*, 2016, 94: 064039
- 28 Date G, Hoque S J. Cosmological horizon and the quadrupole formula in de Sitter background. *Phys Rev D*, 2017, 96: 044026
- 29 Saw V L. Mass-loss of an isolated gravitating system due to energy carried away by gravitational waves with a cosmological constant. *Phys Rev D*, 2016, 94: 104004
- 30 Saw V L. Behaviour of asymptotically electro- Λ spacetimes. *Phys Rev D*, 2017, 95: 084038
- 31 Bieri L, Garfinkle D, Yau S T. Gravitational wave memory in de Sitter spacetime. *Phys Rev D*, 2016, 94: 064040
- 32 Xie F, Zhang X. Peeling property of Bondi-Sachs metrics for nonzero cosmological constant. *ArXiv:1704.06015*, 2017
- 33 Penrose R. Zero rest mass fields including gravitation: Asymptotic behavior. *Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci*, 1965, 284: 159–203
- 34 Luo M, Xie N, Zhang X. Positive mass theorems for asymptotically de Sitter spacetimes. *Nuclear Phys B*, 2010, 825: 98–118
- 35 Liang Z, Zhang X. Spacelike hypersurfaces with negative total energy in de Sitter spacetime. *J Math Phys*, 2012, 53: 022502
- 36 Henneaux M, Teitelboim C. Asymptotically anti-de Sitter spaces. *Comm Math Phys*, 1985, 98: 391–424
- 37 Wang Y, Xie N, Zhang X. The positive energy theorem for asymptotically anti-de Sitter spacetimes. *Commun Contemp Math*, 2015, 17: 1550015

Bondi-Sachs metrics and gravitational waves

Xiao Zhang

Abstract In general relativity, gravitational waves are wave-like metrics which radiate energy, and Bondi-Sachs metrics are one of natural metrics describing them. In this paper, we provide a short review on positivity of the Bondi energy-momentum and the relation between the Bondi energy-momentum and the ADM energy-momentum for Bondi-Sachs metrics when the cosmological constant is zero. We also review a natural boundary condition of the Bondi-Sachs metrics when the cosmological constant is nonzero, and present the peeling property as well as some new features of gravitational B -waves under this boundary condition.

Keywords general relativity, Bondi-Sachs metric, gravitational wave, cosmological constant

MSC(2010) 83C30, 83C35, 53B50

doi: 10.1360/N012017-00208