Will mathematicians unleash the power of the Navier-Stokes equations?

数学家将会最终给出Navier-Stokes方程的解吗?

张平^{1,2}

1. 中国科学院数学与系统科学研究院华罗庚数学重点实验室, 北京 100190;

2. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049

E-mail: zp@amss.ac.cn

2018-03-14收稿, 2018-03-27修回, 2018-03-28接受, 2018-04-24网络版发表

国家自然科学基金(11371347, 11688101)资助

摘要 自1934年Leray证明不可压缩Navier-Stokes方程的整体有限能量分布弱解以来, 关于三维Leray弱解的正则性和唯一性, 以及是否存在有限能量爆破解的研究, 一直是流体力学数学理论的核心课题之一. 该问题和Clay研究所公布的七大千禧年问题之一——关于三维Navier-Stokes方程的整体正则性——紧密相关. 本文主要介绍此问题以及该问题的相关研究进展.

关键词 Navier-Stokes方程, 正则性, 奇性解, 适定性

1 简介

d (2或3)维不可压缩Navier-Stokes方程可描述如下:

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u = -\nabla p + f, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0 \text{ 满足 } \operatorname{div} u_0 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $u = (u_1, \dots, u_d)$ 代表流体运动的速度场, $u \cdot \nabla u = \sum_{j=1}^d u_j \partial_j u$, p 是数量压力, ν 是黏性系数, f 是外力项. 式(1)的第一个方程可由牛顿定律 $F = ma$ 导出, 其中流体受到外力 f 以及流体压力 p 和流体内部摩擦力的作用. $\operatorname{div} u = 0$ 表示流体是不可压缩的.

求解问题(1)就是要求解速度场 u 和压力项 p . 对于式(1)的物理上合理的解 u , 需要保证在 $|x| \rightarrow \infty$ 时, 解 $u(t, x)$ 不能增长太快. 故需要对初值 u_0 和外力项 f 作如下假设:

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha u_0(x)| &\leq C_{\alpha,k} (1 + |x|)^{-k}, \\ |\partial_t^m \partial_x^\alpha f(t, x)| &\leq C_{\alpha,m,k} (1 + |t| + |x|)^{-k}, \end{aligned} \quad (2)$$

对任意的 α, m, k 成立.

定义1 称 (u, p) 为式(1)的物理合理解, 如果 (u, p) 满足方程(1)且

- $(u, p) \in C^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$;
- $\int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^2 dx \leq C$ 对任意 $t \geq 0$ (称为有限能量).

或者为了排除在无穷远处的困难, 可以寻找式(1)的空间周期解. 为此, 记 e_j 为 $\mathbb{R}^d$ 中的第 j 个单位向量, 假设

$$\begin{aligned} u_0(x + e_j) &= u_0(x), \quad f(t, x + e_j) = f(t, x), \quad \forall 1 \leq j \leq d; \\ |\partial_t^m \partial_x^\alpha f(t, x)| &\leq C_{\alpha,m,k} (1 + |t|)^{-k}, \quad \forall \alpha, m, k. \end{aligned} \quad (3)$$

定义2 称 (u, p) 为式(1)的物理合理周期解, 如果 (u, p) 满足方程(1)且

- $(u, p) \in C^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$;
- 对任意 $1 \leq j \leq d$, 在 $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ 成立 $u(t, x) = u(t, x + e_j)$.

Fefferman^[1]关于Clay研究所有关Navier-Stokes方程的千禧年问题阐述为如下4种形式.

(1) 三维Navier-Stokes方程光滑解的存在性. 在式(1)中取 $\nu > 0$, $d = 3$, 给定初值 u_0 满足式(2)并取 $f = 0$,

引用格式: 张平. 数学家将会最终给出Navier-Stokes方程的解吗? 科学通报, 2018, 63: 1082–1087

Zhang P. Will mathematicians unleash the power of the Navier-Stokes equations (in Chinese)? Chin Sci Bull, 2018, 63: 1082–1087, doi: 10.1360/N972018-00231

<https://engine.scichina.com/doi/10.1360/N972018-00231>

能否证明式(1)有一个满足定义1的光滑解?

(2) 三维Navier-Stokes方程光滑周期解的存在性. 在式(1)中取 $\nu > 0, d = 3$, 给定初值 u_0 满足式(3)并取 $f = 0$, 能否证明式(1)有一个满足定义2的光滑解?

(3) 三维Navier-Stokes方程是否存在有限时间爆破解. 在式(1)中取 $\nu > 0, d = 3$, 是否存在初值 u_0 和外力项 f 满足式(2), 使得方程(1)不存在满足定义1的光滑解?

(4) 三维Navier-Stokes方程是否存在有限时间爆破周期解. 在式(1)中取 $\nu > 0, d = 3$, 是否存在初值 u_0 和外力项 f 满足式(3), 使得方程(1)不存在满足定义2的光滑解?

另一方面, Leray^[2]于1934年证明了如下著名定理.

定理1 给定散度为0的向量场 $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, 式(1)存在一个能量有限的整体分布弱解 $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^1(\mathbb{R}^d))$ 满足

(1) 对于任意空间紧支撑、散度为0的光滑向量场 $\Psi(t, x) = (\Psi_1(t, x), \dots, \Psi_d(t, x))$, 成立

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) \cdot \Psi(t, x) dx \\ & - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (\nu \nabla u : \nabla \Psi - u \otimes u : \nabla \Psi - u \partial_t \Psi)(t', x) dx dt' \\ & = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \cdot \Psi(0, x) dx; \end{aligned}$$

(2) 能量不等式

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 dt' \leq \|u_0\|_{L^2}^2. \quad (4)$$

但是当 $d = 3$ 时, 式(1)的Leray弱解的正则性和唯一性至今也是未知的公开问题. 而且Leray^[2]指出Navier-Stokes方程的所有合理估计必须关于如下伸缩变换是不变的:

$$u_\lambda(t, x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad p_\lambda(t, x) = \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x). \quad (5)$$

很容易验证如果 (u, p) 是式(1)在 $[0, T]$ 上的解, 则 (u_λ, p_λ) 是式(1)关于初值 $\lambda u_0(\lambda x)$ 在 $[0, T/\lambda^2]$ 上的解. 而且如下空间的范数是式(5)中关于速度场的伸缩变换下不变的:

$$\begin{aligned} & L^\infty(\mathbb{R}^+; L^d(\mathbb{R}^d)), \quad L^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{\frac{d}{2}-1}), \\ & L^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{\frac{d}{2}-1}) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{\frac{d}{2}}). \end{aligned}$$

通常称此类函数空间为式(1)的临界函数空间. 在 $d = 2$ 时, $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^2))$ 正好是式(1)的临界空间, 而此量正好由能量不等式(4)给出, 也即二维Navier-Stokes方程是关于能量临界的. 这在一定程度上解释了二维Navier-Stokes的Leray弱解是正则而且是唯一的. 而在三维情形, 式(1)的临界空间 $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^3(\mathbb{R}^3))$ 和 $L^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$, 其相比于能量不等式(4)是超临界的. 截至目前, 仍然无法得到三维Navier-Stokes方程一般的关于式(5)不变的先验估计. 在文献中, Chemin等人^[3]利用Navier-Stokes特殊的非线性结构, 构造了 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$ 上Navier-Stokes方程在解析函数类中的一类整体大解.

特别地, 在式(5)中取 $\lambda = \nu$, 在后文中总假设 $\nu = 1$.

2 关于三维Navier-Stokes方程正则性的研究

在Leray的工作之后, 主要有如下3种途径研究三维Navier-Stokes方程的正则性.

2.1 部分正则性

定义3 (恰当弱解) 若 (u, p) 为(1)在 $(0, T) \times \mathbb{R}^3$ 上的分布弱解, 称 (u, p) 在柱体 $Q = (a, b) \times B(x_0, r_0)$ (其中 $0 < a < b < T, x_0 \in \mathbb{R}^3, r_0 > 0$)上是恰当的, 如果 (u, p) 满足

- (1) $\sup_{a < t < b} \int_{B(x_0, r_0)} |u|^2 dx + \iint_Q |\nabla u|^2 dx dt < \infty$;
- (2) $\iint_Q |p|^{\frac{3}{2}} dx dt < \infty$;
- (3) 对任意 $0 \leq \phi \in \mathcal{D}(Q)$ 成立

$$\begin{aligned} 2 \iint |\nabla u|^2 \phi dx dt & \leq \iint |u|^2 (\partial_t \phi + \Delta \phi) dx dt \\ & + \iint (|u|^2 + 2p) u \cdot \nabla \phi dx dt. \end{aligned}$$

如果 (u, p) 在任意柱体 $Q \subset (0, T) \times \mathbb{R}^3$ 上是恰当的, 则称 (u, p) 在 $(0, T) \times \mathbb{R}^3$ 上是恰当的.

定义4 (抛物Hausdorff测度) (1) 记 $Q((t_0, x_0), r) = \{(t, x) : |t - t_0| < r^2, |x - x_0| < r\}$ 为抛物柱体. 记 $\mathcal{Q} = (Q((t_i, x_i), r_i))_{i \in \mathbb{N}}$ 为一列抛物柱体的集合. 对任意 $a > 0$, 定义 $\sigma_a(\mathcal{Q}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^a$. 则对 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ 中任一Borel可测子

集 B , 定义其抛物Hausdorff测度

$$\mathcal{P}^a(B) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sigma_a(Q) : B \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q((t_i, x_i), r_i), \right. \\ \left. \sup_{i \in \mathbb{N}} r_i < \delta \right\}.$$

(2) 定义Borel可测子集 B 的抛物Hausdorff维数

$$d_H(B) = \inf \{ a : \mathcal{P}^a(B) = 0 \} = \sup \{ a : \mathcal{P}^a(B) = \infty \}.$$

Scheffer^[4]首先利用几何测度论来研究三维Navier-Stokes方程恰当弱解的部分正则性, 该结果被Caffarelli等人^[5]改进到如下情形.

定理2 (奇异集的维数) 如果 (u, p) 是式(1)在 $(0, T) \times \mathbb{R}^3$ 上的分布弱解, 而且在柱体 $Q_0 = (a, b) \times B(x_0, r_0)$ 上是恰当的. 假设 Σ 是 Q 中满足 u 在 $Q_0 \setminus \Sigma$ 上是局部有界的最小闭集, 则 $\mathcal{P}^1(\Sigma) = 0$.

Lin^[6]简化了文献[5]的证明. 上述定理是截至目前关于三维Navier-Stokes方程恰当弱解部分正则性方面最佳的结果.

2.2 条件正则性

Prodi^[7], Serrin^[8]和Ladyženskaja^[9]证明了如下定理.

定理3 假设 u, v 是式(1)的两个Leray弱解, 如果对于某 $T > 0$, u 满足Ladyženskaja-Prodi-Serrin条件:

$$\int_0^T \|u(t, \cdot)\|_{L^p}^q dt < \infty, \quad (6)$$

其中 (p, q) 满足

$$\frac{2}{q} + \frac{3}{p} = 1, \quad p \in (3, \infty], \quad (7)$$

则 $u = v$, 而且 u 在 $(0, T] \times \mathbb{R}^3$ 上是光滑的.

实际上上述定理的唯一性部分由Prodi^[7]和Serrin^[8]所证明, 而光滑性部分由Ladyženskaja^[9]所证明. 式(7)的端点情形 $q = \infty, p = 3$ 直到2003年才由Escauriaza等人^[10]所证明. 很容易验证若 p, q 满足式(7), 范数 $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^+; L^p(\mathbb{R}^3))}$ 关于伸缩变换式(5)是不变的.

由于速度场 u 满足 $\operatorname{div} u = 0$, 定理3的一个自然推广形式是只要速度场的两个分量满足Ladyženskaja-Prodi-Serrin条件, 则该Leray弱解是唯一的而且是光滑的. 关

于速度场一个分量在临界空间中的正则性准则可参考文献[11]以及其中的参考文献. 文献[11]中主要定理的证明基于如下的定理4, 其为定理3的推广形式. 为介绍此结果, 首先回顾Besov空间(见文献[12])的定义.

定义5 如 σ 为一正数, 定义

$$\dot{B}_{\infty, \infty}^{-\sigma}(\mathbb{R}^3) = \left\{ f \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^3) : \|f\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-\sigma}} \right. \\ \left. \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t>0} t^{\frac{\sigma}{2}} \|e^{t\Delta} f\|_{L^\infty} < \infty \right\}.$$

特别地, 对 $p \in (1, \infty)$, 记 $\mathcal{B}_p = \dot{B}_{\infty, \infty}^{-2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^3)$.

定理4 (文献[11]中定理1.5) 若 $u \in C([0, T^*]; H^{\frac{1}{2}}) \cap L^2_{\text{loc}}([0, T^*]; H^{\frac{3}{2}})$ 为式(1)的解, T^* 为该解的生命跨度, 如果 $T^* < \infty$, 则对任意 $(p, \ell) \in (1, \infty)^2$, 成立

$$\sum_{1 \leq k, \ell \leq 3} \int_0^{T^*} \|\partial_\ell u_k(t)\|_{\mathcal{B}_{p, \ell}}^{p, \ell} dt = \infty.$$

上述定理蕴含了定理3, 它在某种程度上是满足速度场范数关于伸缩变换(5)不变的最为广泛的正则性准则.

另一方面, 由式(1)的速度场方程知: 如果式(1)的光滑解产生奇性, 则压力项 $p = \infty$. 特别地, Berselli等人^[13]证明了若压力项满足

$$\int_0^T \|p(t, \cdot)\|_{L^3}^2 dt < \infty, \quad (8)$$

则局部光滑解不会在 $[0, T]$ 内爆破(注意到 $\|p\|_{L^2(\mathbb{R}^+; L^3(\mathbb{R}^3))}$ 是压力关于伸缩变换(5)不变的范数).

Seregin和Šverák^[14]还证明了如果

$$\inf_{t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^3} p(t, x) > -\infty,$$

则三维Navier-Stokes方程的Leray弱解无奇点.

如果压力项 p 仅依赖于 (t, x_1, x_2) 而不依赖于 x_3 , Cao和Titi^[15]对大尺度大气海洋的黏性原始方程证明了该问题存在唯一的整体光滑解.

关于三维Navier-Stokes方程的另一个重要的物理量是涡度 $\omega = \nabla \times u$, 其满足

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega - \nu \Delta \omega = \omega \cdot \nabla u. \quad (9)$$

这是和式(1)等价的形式. 知道了流体涡度 ω , 可通过Biot-Savart定律求出速度场 u .

Constantin 和Fefferman^[16] 证明了若涡度方向 $\xi = \frac{\omega}{|\omega|}$ 在涡度大的区域中是局部Lipschitz的, 则式(1)对于光滑初值不会产生奇性.

2.3 在临界空间中的整体适定性

现在已有很多有关初值在临界函数空间中方程(1)的整体适定性结果. 这方面的第一个结果是由Fujita和Kato^[17] 于1964年所证明的.

定理5 给定初值 $u_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, 则存在一小常数 c_0 使得

$$\|u_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\xi| |\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi \leq c_0,$$

Navier-Stokes 方程(1) 存在唯一的整体解.

对初始速度 $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, Kato^[18]于1984年证明了类似于定理5的结果. 他的主要证明思想是将式(1)写成一个双线形的积分方程, 并证明对任意 $p \in (3, \infty)$, 该方程在如下的函数空间中存在唯一的不动点:

$$\begin{aligned} K_p(T) &= \{u \in C([0, T]; L^p) / \|u\|_{K_p(T)} \\ &= \sup_{t \in (0, T]} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{p})} \|u(t)\|_{L^p} < \infty\}. \end{aligned}$$

现在通常称此类函数空间为Kato空间, 此种形式的解称为温和解.

在1993年, Cannone等人^[19] 证明了如果初值 u_0 满足对某一 $p \in (3, \infty)$, 成立

$$\|u_0\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-1+\frac{3}{p}}} \leq c,$$

则三维Navier-Stokes 方程(1) 存在唯一的整体温和解. Koch 和Tataru^[20]对初值在 ∂BMO 空间的情况证明了类似的结果. 注意到

$$\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^3(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_{p,\infty}^{-1+\frac{3}{p}}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \partial\text{BMO}(\mathbb{R}^3),$$

Koch 和Tataru^[20]的结果应该是三维Naveir-Stokes方程初值在临界函数空间中适定的最佳结果. 实际上, Bourgain和Pavlovic^[21]证明了三维Naveir-Stokes方程初值在 $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ 中是不适定的. 有关这方面的详细结果可参考文献[22].

需要指出的是Cannone等人^[19] 以及Koch 和Tataru^[20] 的结果特别地证明了对于如下初值:

$$u_0^\varepsilon(x) = \sin\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)(0, -\partial_3\phi, \partial_2\phi), \quad (10)$$

当 ε 充分小时, 三维Navier-Stokes 方程(1) 存在唯一的整体解.

3 关于Navier-Stokes 方程爆破解的研究

在1934年, 对某一正数 a , Leray^[2]提议研究如下形式的自相似爆破解:

$$u(t, x) = \lambda(t)U(\lambda(t)x), \text{ 其中 } \lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2a(T^* - t)}}. \quad (11)$$

Nečas等人^[23]证明了如果 $U \in L^3(\mathbb{R}^3)$, 则 $U = 0$. Tsai^[24]将此结果推广到 $U \in C_0(\mathbb{R}^3)$ 或者解 u 在爆破点附近具有局部有限能量的情形. 他们的主要证明思想是对 $\Pi = \frac{1}{2}|U|^2 + P + ax \cdot U$ 使用Hopf强极值原理并使用Caffarelli^[5]正则性准则, 其中 P 通过关系式 $\nabla p(t, x) = \lambda(t)^3 \nabla P(\lambda(t)x)$ 确定.

最近Tao^[25]提出了一个构造Navier-Stokes方程奇性解的想法. 他特别强调只有充分利用Navier-Stokes方程的精细的非线性结构, 才有可能构造三维Navier-Stokes方程的有限时间爆破解.

致谢 该研究受到中国科学院晨兴数学中心和中国科学院国家数学与交叉科学中心的支持.

参考文献

- 1 Fefferman C L. The Millennium Prize Problems: Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation. Cambridge MA: Clay Math Inst, 2006. 57-67
- 2 Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta Math, 1934, 63: 193-248
- 3 Chemin J Y, Gallagher I, Paicu M. Global regularity for some classes of large solutions to the Navier-Stokes equations. Ann Math, 2008, 173: 983-1012

- 4 Scheffer V. Turbulence and Hausdorff dimension. In: Turbulence and Navier-Stokes Equations. Berlin: Springer, 1976. 174–183
- 5 Caffarelli L, Kohn R, Nirenberg L. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Comm Pure Appl Math*, 1982, 35: 771–831
- 6 Lin F H. A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem. *Comm Pure Appl Math*, 1998, 51: 241–257
- 7 Prodi G. Un teorema di unicità per le equazioni di Navier-Stokes (Italian). *Ann Mat Pura Appl*, 1959, 48: 173–182
- 8 Serrin J. The initial value problem for the Navier-Stokes equations. In: Madison W, ed. *Nonlinear Problems*. Chicago: University of Wisconsin Press, 1963. 69–98
- 9 Ladyženskaja O A. Uniqueness and smoothness of generalized solutions of Navier-Stokes equations. *Zap Naučn Sem Leningrad Otdel Mat Inst Steklov*, 1967, 5: 169–185
- 10 Escauriaza L, Seregin G, Sverak V. $L^{3,\infty}$ -solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness. *Uspekhi Mat Nauk*, 2003, 58: 3–44
- 11 Chemin J Y, Zhang P. On the critical one component regularity for 3-D Navier-Stokes systems. *Ann Sci École Norm*, 2016, 49: 131–167
- 12 Bahouri H, Chemin J Y, Danchin R. Fourier analysis and nonlinear partial differential equations. In: *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Berlin: Springer, 2011. 213–214
- 13 Berselli L C, Galdi G P. Regularity criteria involving the pressure for the weak solutions to the Navier-Stokes equations. *Proc Amer Math Soc*, 2002, 130: 3585–3595
- 14 Seregin G, Šverák V. Navier-Stokes equations with lower bounds on the pressure. *Arch Ration Mech Anal*, 2002, 163: 65–86
- 15 Cao C S, Titi E S. Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics. *Ann Math*, 2007, 166: 245–267
- 16 Constantin P, Fefferman C L. Direction of vorticity and the problem of global regularity for the Navier-Stokes equations. *Indiana Univ Math J*, 1993, 42: 775–789
- 17 Fujita H, Kato T. On the Navier-Stokes initial value problem. I. *Arch Rational Mech Anal*, 1964, 16: 269–315
- 18 Kato T. Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equation in R^m , with applications to weak solutions. *Math Z*, 1984, 187: 471–480
- 19 Cannone M, Meyer Y, Planchon F. Solutions auto-similaires des équations de Navier-Stokes. *Séminaire Équations Dérivées Partielles (Polytechnique)*, 1994, 8: 1–10
- 20 Koch H, Tataru D. Well-posedness for the Navier-Stokes equations. *Adv Math*, 2001, 157: 22–35
- 21 Bourgain J, Pavlović N. Ill-posedness of the Navier-Stokes equations in a critical space in 3D. *J Funct Anal*, 2012, 225: 2233–2247
- 22 Lemarié-Rieusset P G. Recent Developments in the Navier-Stokes Problem. *Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics*. Boca Raton FL: Chapman & Hall/CRC, 2002. 431
- 23 Nečas J, Ružička M, Šverák V. On Leray’s self-similar solutions of the Navier-Stokes equations. *Acta Math*, 1996, 176: 283–294
- 24 Tsai T P. On Leray’s self-similar solutions of the Navier-Stokes equations satisfying local energy estimates. *Arch Ration Mech Anal*, 1998, 143: 29–51
- 25 Tao T. Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation. *J Amer Math Soc*, 2016, 29: 601–674

张平

现任中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所所长。1987~1997年于南京大学数学系获基础数学学士、硕士、博士学位；2003年至今任中国科学院数学与系统科学研究院研究员。曾获国家杰出青年科学基金、第十届中国青年科技奖、国家自然科学基金二等奖；享受国务院政府特殊津贴；入选新世纪百千万人才工程国家级人选；国家科技部青年领军人才，并被聘为教育部长江特聘教授(中国科学院大学)。主要研究领域为黏性流体力学方程组的整体解和非线性薛定谔方程的半经典极限。

Will mathematicians unleash the power of the Navier-Stokes equations?

Ping Zhang^{1,2}

¹ Key Laboratory Hua Loo-Keng for Mathematical Sciences, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

² School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China
E-mail: zp@amss.ac.cn

Since 1934 when Leray proved the global existence of finite energy weak solutions to 3D incompressible Navier-Stokes equations, the regularity and uniqueness of Leray weak solutions has been core in the mathematical theory of incompressible fluid mechanics. This problem is also closely related to the Millionaire's problem proposed by Clay Institute, namely, the global regularity or singularity to finite energy solutions of 3D incompressible Navier-Stokes system. The goal of this article is first to introduce the problem and then to survey some progresses on this problem. In Section 1, following Fefferman, we first present the Millionaire's problem concerning 3D incompressible Navier-Stokes equations. We also present the result of Leray on the global existence of finite energy weak solutions to the system. We conclude the introduction by remarking that the reason why we cannot solve the global regularity of 3D Navier-Stokes is that the system is energy super-critical. Whereas the energy law is so far the only conservation law which we can find for 3D Navier-Stokes system. The goal of Section 2 is to present the main approaches toward the regularity of 3D Navier-Stokes system, namely, partial regularity of suitable weak solutions to 3D Navier-Stokes system, conditional regularity of Leray solutions, and well-posedness of 3D Navier-Stokes system with initial data in the critical spaces. Finally, in the last section, we comment about the possible singularity of 3D Navier-Stokes system.

Navier-Stokes equations, regularity, singularity, well-posedness

doi: 10.1360/N972018-00231